



**Katedra
Nanometrologii**

ĆWICZENIA:
PODSTAWY METROLOGII

5. Pomiary rezystancji

W12IEA-SI0003C

[wzn.pwr.edu.pl/materialy-dydaktyczne/
podstawy-metrologii](http://wzn.pwr.edu.pl/materialy-dydaktyczne/podstawy-metrologii)



1. Definicje

Rezystancja elementu jest miarą oporu, z jakim element ten przeciwstawia się przepływowi prądu elektrycznego. Z definicji rezystancja jest współczynnikiem proporcjonalności między natężeniem prądu płynącego przez element a różnicą potencjałów pomiędzy elektrodami. Zależność tę przedstawia **prawo Ohma**¹:

$$R = \frac{U}{I}.$$

Jednostką rezystancji jest **om** ($1 \Omega = 1 \text{ V} \cdot \text{A}^{-1}$). Elementy, których rezystancja jest stała w danych warunkach środowiskowych (np. wszystkie elementy metalowe i większość stosowanych izolatorów) nazywamy **liniowymi**, tzn. że zależność natężenia prądu od napięcia jest – zgodnie z prawem Ohma – funkcją liniową. Z kolei te elementy, których rezystancja jest zależna od przyłożonego napięcia, nazywamy **nieliniowymi** (np. półprzewodniki).

Konduktancja materiału jest miarą podatności elementu na przepływ prądu elektrycznego. Jest ona odwrotnością rezystancji:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}.$$

Jednostką konduktancji jest **simens** ($1 \Omega = 1 \text{ A} \cdot \text{V}^{-1}$).

Rezystywnością nazywamy rezystancję właściwą, a więc cechę charakterystyczną dla danego materiału, nie dla elementu, który z niego wykonano. Dla prostoliniowego przewodnika o długości l oraz przekroju S rezystancja jest równa:

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

gdzie ρ jest rezystywnością materiału, z którego wykonano ten przewodnik. Jednostką rezystywności jest **om razy metr** ($1 \Omega \cdot \text{m}$).

Definiujemy również **konduktywność (przewodność)** – konduktancję właściwą, która jest odwrotnością rezystywności:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}.$$

Jednostką konduktywności jest **simens na metr** (1 S/m).

Dla większości materiałów rezystywność (a więc także konduktywność) jest zależna od temperatury. W przypadku elementów wykonanych z metalu ich opór rośnie wraz ze wzrostem temperatury.

Opór elektryczny jest związany ze stratą energii w danym elemencie. W przypadku elementów o charakterze rezystancyjnym energia jest rozpraszana w postaci ciepła. Podczas pracy element zwiększa swoją temperaturę wraz ze wzrostem prądu i napięcia. **Moc**, jaka jest wydzielana przez dany element, określona jest zależnościami:

$$P = U \cdot I \text{ lub } P = \frac{U^2}{R} \text{ lub } P = I \cdot R$$

Każdy element może pracować do pewnej maksymalnej temperatury, powyżej której zostanie zniszczony. Temperatura ta odpowiada mocy maksymalnej, podawanej przez producentów elementów elektronicznych.

¹ Georg Simon Ohm (1789–1854) – niemiecki matematyk, profesor uniwersytetów w Monachium i Norymberdze

2. Metody pomiaru rezystancji

Rezystancję można zmierzyć za pomocą kilku różnych metod.

Najbardziej popularne z nich to:

- metody pośrednie
- metody zerowe (np. mostkowe)
- metoda bezpośrednia.

2.1. Metoda techniczna

Metody pośrednie pomiaru rezystancji polegają na zestawieniu przyrządów pomiarowych (woltomierza, amperomierza) i badanego obiektu w odpowiedni obwód pomiarowy i bezpośrednim wykorzystaniu prawa Ohma. Metoda taka bardzo często jest nazywana metodą techniczną. Zmierzona rezystancja jest równa ilorazowi napięcia wskazanego przez woltomierz przez natężenie wskazane przez amperomierz:

$$R = \frac{U_V}{I_A}.$$

Niepewność takiego pomiaru wyznaczona z wykorzystaniem prawa propagacji niepewności jest równa:

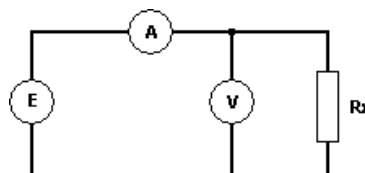
$$u(R_{zm}) = \sqrt{\left(\frac{1}{I_A} \cdot u(U_V)\right)^2 + \left(\frac{-U_V}{(I_A)^2} \cdot u(I_A)\right)^2},$$

gdzie $u(U_V)$ i $u(I_A)$ to niepewności pomiaru napięcia i prądu. Niepewność względna wynosi natomiast:

$$\delta R_{zm} = \pm(\delta U_V + \delta I_A).$$

Niestety, wykorzystywane urządzenia nie są idealne. Posiadają pewną określoną i skończoną rezystancję wewnętrzną, która po włączeniu urządzenia do układu wpływa na wynik pomiaru. Wartość wskazywana przez woltomierz nie jest spadkiem napięcia tylko na rezystorze albo wskazywane przez amperomierz natężenie prąd nie jest natężeniem prądu płynącego jedynie przez rezystor. Wynik pomiaru rezystancji jest więc obciążony błędem metody (błędem systematycznym).

Pomiar rezystancji metodą pośrednią można wykonać na dwa sposoby: mierząc poprawnie natężenie prądu lub mierząc poprawnie napięcie. **Układ poprawnego pomiaru napięcia** przedstawiony jest na poniższym rysunku:



Poprawny pomiar napięcia oznacza, że $U_v = U_{R_x}$. Natomiast amperomierz w tym wypadku pokazuje natężenie prądu równe sumie natężeń prądów płynących przez rezystor (I_{R_x}) oraz przez woltomierz (I_v). Poprawna wartość mierzonej rezystancji wyrażona jest więc wzorem:

$$R_x = \frac{U_v}{I_A - I_v}.$$

Bezwzględny błąd systematyczny jest równy:

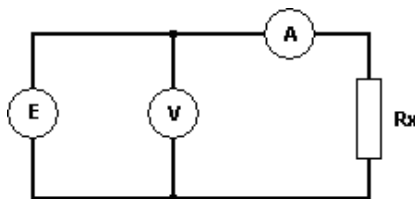
$$\Delta R_s = R_{zm} - R_x = \frac{R_x \cdot R_v}{R_x + R_v} - R_x = \frac{-(R_x)^2}{R_x + R_v},$$

a błąd względny:

$$\delta R_s = \frac{-R_x}{R_x + R_v} \cdot 100\%.$$

W przypadku pomiaru dużej rezystancji (rzędu megaomów) wynik uzyskany w układzie poprawnego pomiaru napięcia obciążony będzie dużym błędem, gdyż woltomierz zbocznikuje mierzoną rezystancję i zmieni prąd wskazywany przez amperomierz. W związku z tym układ poprawnego pomiaru napięcia jest właściwy do pomiaru małych rezystancji.

W układzie **poprawnego pomiaru natężenia** prądu napięcie wskazywane na woltomierzu to suma spadków napięć na elemencie mierzonym i na amperomierzu o niezerowej rezystancji ($I_A = I_{R_x}$).



Poprawna wartość mierzonej rezystancji jest równa:

$$R_x = \frac{U_v - U_A}{I_A} = \frac{U_v}{I_A} - R_A,$$

a bezwzględny błąd systematyczny (metody):

$$\Delta R_s = R_{zm} - R_x = R_A.$$

Błąd względny metody wynosi więc:

$$\delta R_s = \frac{R_A}{R_x} \cdot 100\%.$$

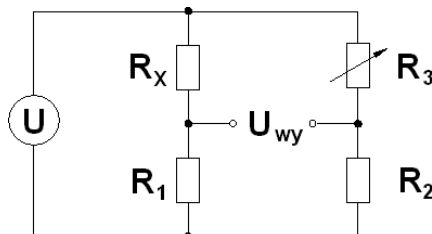
Należy zauważyć, że w przypadku pomiaru małej rezystancji (rzędu pojedynczych omów) wynik uzyskany w układzie poprawnego pomiaru natężenia prądu obciążony będzie dużym błędem, gdyż spadek napięcia na amperomierzu będzie miał istotny udział w napięciu mierzonym przez woltomierz. W związku z tym układ poprawnego pomiaru natężenia prądu jest właściwy do pomiaru dużych rezystancji. Wzory na błąd względny posłużyły do wyznaczenia tzw. **rezystancji granicznej**. Wyraża się ona wzorem:

$$R_{gr} = \sqrt{R_A \cdot R_v}.$$

Jeżeli spodziewana wartość rezystancji jest większa od rezystancji granicznej, to stosuje się układ poprawnie mierzonego natężenia prądu. Jeżeli jest mniejsza – układ poprawnie mierzonego napięcia. Warto zauważyć, że w pewnych szczególnych przypadkach błędy systematyczne można pominąć, jeżeli są dużo mniejsze niż niepewność pomiaru spowodowana klasą stosowanych przyrządów. W przypadku pomiaru obiema metodami rezystancji równej rezystancji granicznej otrzymamy identyczne wyniki.

2.2. Metody zerowe

Metody zerowe pomiaru rezystancji polegają na pomiarze bezprądowym. Mierzony element podłączamy do odpowiednio skonstruowanego układu odniesienia wyposażonego we wskaźnik przepływu prądu (mikroamperomierz, galwanometr lub podobny). Pomiar polega na doborze parametrów układu referencyjnego aż do uzyskania braku przepływu prądu przez wskaźnik. Proces ten nazywamy równoważeniem. Najczęściej spotykanymi metodami zerowymi pomiaru rezystancji są metody mostkowe. Najbardziej znany mostek do pomiaru rezystancji – mostek Wheatstone’a – pokazano na rysunku poniżej:



Zasada działania tego mostka opiera się na dwóch dzielnikach napięciowych. Pierwszy z dzielników składa się z mierzonego elementu (R_x) oraz znanego rezystora R_1 . Drugi z dzielników składa się z rezystora stałego R_2 oraz potencjometru R_3 .

Po dostarczeniu do układu napięcia U za pomocą rezystora zmiennego R_3 doprowadzamy do sytuacji, kiedy oba dzielniki napięciowe mają jednakowy współczynnik podziału, a w związku z tym – jednakowe napięcie wyjściowe. Wystąpienie takiej sytuacji (nazywanego stanem równowagi) obserwujemy za pomocą woltomierza, który wskaże brak napięcia pomiędzy wyjściami dzielników, lub też za pomocą amperomierza łączącego oba zaciski wyjściowe, który wskaże brak przepływu prądu pomiędzy dzielnikami (co wskazuje na brak różnicy potencjałów). W stanie równowagi:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_x} = \frac{R_2}{R_2 + R_3},$$

stąd:

$$\frac{1}{\frac{R_x}{R_1} + 1} = \frac{1}{\frac{R_3}{R_2} + 1},$$

czyli ostatecznie warunek równowagi jest następujący:

$$\frac{R_x}{R_1} = \frac{R_3}{R_2}.$$

Zatem rezystancja mierzonego elementu wynosi:

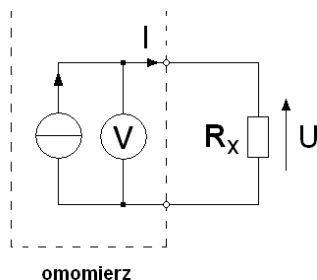
$$R_x = R_3 \cdot \frac{R_1}{R_2}.$$

Znając stosunek R_1 do R_2 , możemy odczytać R_x bezpośrednio z odpowiednio spreparowanej skali potencjometru R_3 .

Metoda mostkowa nie jest współcześnie używana bezpośrednio w przyrządach pomiarowych, jednakże spotyka się ją bardzo często w mikroelektronice w układach pomiarowych wykorzystujących czujniki rezystancyjne (np. temperatury lub ciśnienia).

2.3. Metoda pośrednia

We współczesnych omomierzach najczęściej wykorzystywana jest metoda **bezpośrednia** pomiaru rezystancji. Polega ona na odczycie rezystancji bezpośrednio ze wskazań przyrządu przeznaczonego do jej mierzenia, a więc omomierza. Najczęściej w urządzeniach cyfrowych omomierz jest realizowany przez pomiar spadku napięcia na badanym elemencie po zasileniu go prądem z wbudowanego źródła prądowego o znanym, stabilnym natężeniu prądu. Przyjmując w takim układzie, że amperomierz jest przyrządem idealnym i ma zerową rezystancję (w rzeczywistości jest to kilka omów) otrzymujemy wskazanie:



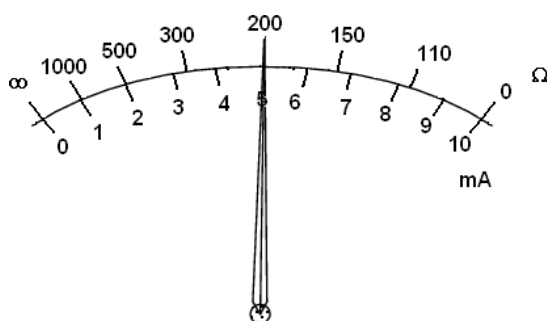
W takim układzie:

$$R_x = \frac{U}{I}.$$

W urządzeniach analogowych jest odwrotnie. Do elementu przykładane jest napięcie o znanej wartości, a płynący przez ten element prąd powoduje wychylenie wskazówki na nieliniowej skali, opisanej w omach. Nieliniowość skali wynika z zależności prądu od mierzonej rezystancji:

$$I = \frac{1}{R_x} \cdot U.$$

Przykład. Przyrząd analogowy ma źródło napięcia 1 V oraz ustrój magnetoelektryczny, którego wskazówka wychyla się do końca skali dla prądu o natężeniu 10 mA. Gdy mierzymy rezystancję 100 Ω lub mniej, przez ustrój magnetoelektryczny płynie prąd co najmniej 10 mA. Wskazówka wychyla się do końca skali. Gdy mierzymy rezystancję 200 Ω , płynący prąd ma natężenie 5 mA, a więc wskazówka wychyla się jedynie do połowy skali. Dla rezystancji 300 Ω będziemy mieli do czynienia z prądem 3,3 mA, dla 500 Ω otrzymamy 2 mA itd. Wskazówka znajdzie się na początku skali tylko wtedy, gdy przez mierzony element nie popłynie żaden prąd, a więc będzie on miał nieskończenie dużą rezystancję. Skala tego przyrządu musi więc wyglądać następująco:



2.4. Rezystancja doprowadzeń

Przy pomiarach małych rezystancji bardzo często spotykamy się z problemem wpływu przewodów pomiarowych na odczytywaną z przyrządu wartość. Wyznamy rezystancję jednometrowego przewodu miedzianego o średnicy 0,5 mm.

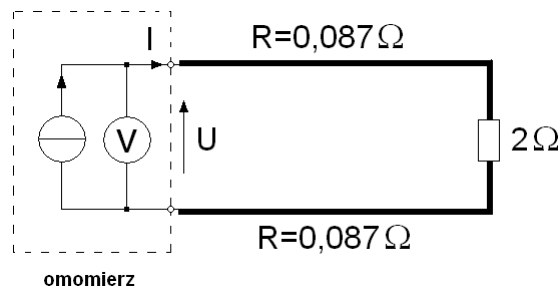
- rezystywność miedzi jest równa $1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$,
- powierzchnia przekroju tego przewodu to:

$$\pi \cdot \left(\frac{0,0005}{2}\right)^2 \approx 1,9635 \cdot 10^{-7} \text{m}^2,$$

Korzystając z podanej wcześniej zależności na rezystancję prostoliniowego przewodnika otrzymujemy:

$$R = \rho \frac{l}{S} = 1,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{1,9635 \cdot 10^{-7}} \approx 0,087 \Omega.$$

Zmierzmy rezystancję opornika wzorcowego (a więc bardzo dokładnego) o znamionowej wartości 2Ω za pomocą dwóch jednometrowych przewodów w układzie jak na rysunku:



Otrzymamy:

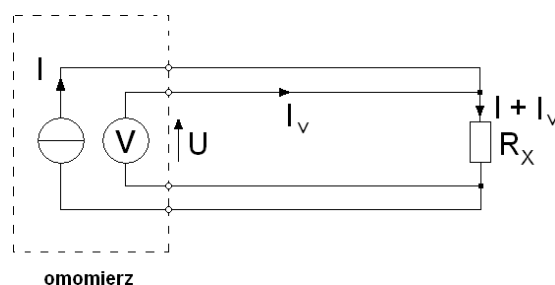
$$U = I \cdot R = I \cdot (0,087 + 2 + 0,087),$$

$$R = \frac{U}{I} = 2,174 \Omega.$$

Zmierzona w takim układzie rezystancja jest zawyżona o $0,174 \Omega$, czyli 8,7%.

Z powyższych rozważań możemy wywnioskować, że do pomiarów małych rezystancji należy używać jak najkrótszych przewodów o jak największym przekroju. Rezystancja takich przewodów będzie bardzo mała, więc błąd systematyczny pomiaru będzie zaniedbywalny.

Innym, lepszym rozwiązaniem takiego problemu jest pomiar rezystancji **metodą czteropunktową**. W przyrządach wykorzystujących taką metodę oddzielamy przewody doprowadzające prąd do mierzonego obiektu (tzw. przewody prądowe) od przewodów mierzących napięcie (tzw. przewody napięciowe). Otrzymujemy układ:



Napięcie na zaciskach woltomierza wynosi (zgodnie z prawami Kirchoffa2 i prawem Ohma):

$$U = I_V \cdot R_{\text{przewodu}} + (I + I_V) \cdot R_X + I_V \cdot R_{\text{przewodu}}$$

Ponieważ rezystancja wejściowa woltomierza jest bardzo duża (typowo 10 MΩ), natężenie prądu I_V jest bardzo małe (rzędu nanoamperów). Z kolei natężenie prądu I jest dość duże ze względu na małą rezystancję R_X (układ czteroprzewodowy służy do pomiaru małych rezystancji). W związku z tym możemy napisać, że w przybliżeniu:

$$U = I \cdot R_X$$

Wartość zmierzona przez woltomierz jest dzielona przez znane natężenie prądu generowane przez wewnętrzne źródło prądowe (I), a więc rezystancja, jaką wyświetli przyrząd, będzie równa rezystancji, którą chcemy zmierzyć. Wyeliminowaliśmy w ten sposób wpływ rezystancji przewodów doprowadzających. Należy jedynie pamiętać o tym, że punkt połączenia przewodów prądowych i przewodów napięciowych powinien znajdować się jak najbliżej mierzonego elementu.

W multimetrach laboratoryjnych funkcja pomiaru rezystancji metodą czteroprzewodową jest oznaczona jako 4W (ang. 4-wire – czteroprzewodowy) w odróżnieniu od klasycznego układu omomierza oznaczonego jako 2W (ang. 2-wire – dwuprzewodowy).

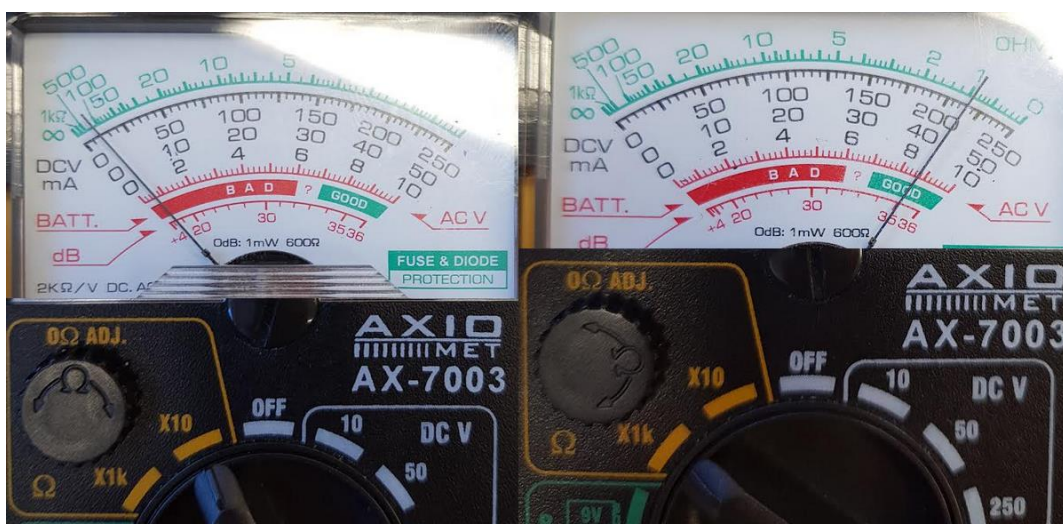
4. Przykładowe zadania

Zadanie 1.

Multimetrem analogowym AX-7003 zmierzono wartość rezystancji. Wyniki pomiarów znajdują się poniżej. Wyznacz błąd bezwzględny i względny pomiaru. Zapisz wynik pomiaru zgodnie z zasadami. Poniżej instrukcja pomiaru rezystancji z noty katalogowej przyrządu:

Read the resistance reading on the "OHMS" scale (Green Color), use proper multiply to get the correct value (R X 10, R x 1k), depending on the resistance range.

Resistance	Range	Rx10,x1k(measurement up to 1MΩ)
	Accuracy	



Zadanie 2.

Multimetrem cyfrowym 34460A zmierzono wartość rezystancji. Wyznacz błąd bezwzględny i względny pomiaru. Zapisz wynik pomiaru zgodnie z zasadami.

Accuracy Specifications \pm (% of reading + % of range)

Function	Range ³	1 year $23 \pm 5^\circ\text{C}$
Resistance ⁷	100.0000 Ω	0.010 + 0.004
	1.000000 k Ω	0.010 + 0.001
	10.00000 k Ω	0.010 + 0.001
	100.0000 k Ω	0.010 + 0.001
	1.000000 M Ω	0.010 + 0.001
	10.00000 M Ω	0.040 + 0.001
	100.0000 M Ω	0.800 + 0.001

Zadanie 3.

Dokonano pomiaru rezystancji opornika metodą poprawnego pomiaru napięcia.

a) Woltomierz Agilent 34460A wskazał wartość $U_v = 4,7908$ V natomiast amperomierz Agilent 34460A $I_A = 48,630$ mA.

b) Woltomierz Agilent 34460A wskazał wartość $U_v = 5,0584$ V natomiast amperomierz Agilent 34460A $I_A = 0,0233$ mA.

Oblicz poprawną wartość rezystancji, bezwzględny błąd systematyczny (metody) oraz błąd względny metody. Brakujące dane odczytaj z noty katalogowej Agilent 34460A.

Zadanie 4.

Dokonano pomiaru rezystancji opornika metodą poprawnego pomiaru natężenia prądu.

a) Woltomierz Agilent 34460A wskazał wartość $U_v = 5,0585$ V natomiast amperomierz Agilent 34460A $I_A = 48,628$ mA.

b) Woltomierz Agilent 34460A wskazał wartość $U_v = 5,0586$ V natomiast amperomierz Agilent 34460A $I_A = 0,0228$ mA.

Oblicz poprawną wartość rezystancji, bezwzględny błąd systematyczny (metody) oraz błąd względny metody. Brakujące dane odczytaj z noty katalogowej Agilent 34460A.

Zadanie 5.

Zaprojektuj mostek Wheatstone'a tak, aby umożliwił pomiar rezystora o rezystancji 100Ω , gdy:

- masz do dyspozycji rezystory o wartościach: 500Ω i 100Ω ;
- masz do dyspozycji rezystory o wartościach 50Ω ;
- masz do dyspozycji rezystory o wartościach 200Ω ;
- masz do dyspozycji rezystory o dowolnej wartości rezystancji.

Zadanie 6.

Wyznacz rezystancję 5 metrowego przewodu miedzianego o średnicy $0,5$ mm. Jaką średnicę musiałby mieć tak samo długi przewód wykonany z aluminium, aby jego rezystancja była taka sama jak jego miedzianego odpowiednika? Z jakiego materiału powinien zostać wykonany przewód jeśli zależałoby nam na jak najmniejszym jego oporze?

Zadanie 7.

O ile będzie zawyżona rezystancja opornika o znamionowej rezystancji 4Ω jeśli do zmierzenia jego rezystancji wykorzystano dwa dwumetrowe przewody (rezystancja każdego z nich wynosi $1,421 \Omega$).

Zadanie 8.

Czy na zakresie $100\ \Omega$ omomierz cyfrowy nie przeciąży elementu mierzonego o mocy znamionowej rezystora = $0,1\ \text{mW}$, $R=15\ \Omega$?

Range	Resolution	Resolution			Source Current
		4½ Digits	5½ Digits	6½ Digits	
10 Ω	10.00000 Ω	1 m Ω	100 $\mu\Omega$	10 $\mu\Omega$	5 mA / 13 V
100 Ω	100.0000 Ω	10 m Ω	1 m Ω	100 $\mu\Omega$	1 mA / 6 V
1 k Ω	1.000000 k Ω	100 m Ω	10 m Ω	1 m Ω	1 mA / 6 V
10 k Ω	10.00000 k Ω	1 Ω	100 m Ω	10 m Ω	100 μA / 6 V
100 k Ω	100.0000 k Ω	10 Ω	1 Ω	100 m Ω	10 μA / 13 V
1 M Ω	1.000000 M Ω	100 Ω	10 Ω	1 Ω	10 μA / 13 V
10 M Ω	10.00000 M Ω	1 k Ω	100 Ω	10 Ω	1 μA / 13 V
100 M Ω	100.0000 M Ω	10 k Ω	1 k Ω	100 Ω	1 μA 10 M Ω / 10 V
1.0 G Ω	1.000000 G Ω	100 k Ω	10 k Ω	1 k Ω	1 μA 10 M Ω / 10 V

Zadanie 9.

Wyznacz niepewność pomiaru rezystancji (prawo propagacji niepewności) wyznaczonej z układu poprawie mierzonego napięcia. $U_v= 10,48\ \text{V}$, $I_a= 4,77\ \text{A}$. Natężenie prądu zmierzono z błędem granicznym $0,04\ \text{A}$, a napięcie z błędem granicznym $0,03\ \text{V}$. Przyjmij, że błąd aparatury ma rozkład prostokątny.