



**Katedra
Nanometrologii**

ĆWICZENIA:
PODSTAWY METROLOGII

**3. Statystyczna analiza
wyników pomiarów**

W12IEA-SI0003C

[wzn.pwr.edu.pl/materialy-dydaktyczne/
podstawy-metrologii](http://wzn.pwr.edu.pl/materialy-dydaktyczne/podstawy-metrologii)



1. Wstęp

Pomiar jest zawsze operacją niedokładną. Wartość otrzymana jako wynik pomiaru różni się zwykle od wartości prawdziwej. Nawet jeśli zdarzy się, że wynik pomiaru jest równy wartości prawdziwej, fakt ten pozostanie zawsze nieznanym gdyż jedyną dostępną nam drogą poznania rzeczywistości jest niedoskonały pomiar. Z tego też względu wartość uzyskaną w procesie metrologicznym nazywamy **estymatą** wartości prawdziwej (innymi słowami: oszacowaniem, przybliżeniem). **Błąd pomiaru** definiuje się z kolei jako różnicę między wynikiem pomiaru, a **wartością prawdziwą**. Ponieważ, jak wspomniano wyżej, wartość prawdziwa pozostaje zawsze nieznaną, błąd też nigdy nie będzie znany. Możemy więc mówić tylko o oszacowaniu błędu pomiarowego. Błąd jest zdarzeniem dyskretnym, niepowtarzalnym. W przypadku procesu pomiarowego możemy mówić o niepewności uzyskiwanych wyników, a nie o ich błędach, gdyż błędy pozostaną zawsze nieznanymi.

Wynik pomiaru można więc interpretować jako przedział w przestrzeni liczb rzeczywistych, czyli na osi liczbowej, wewnątrz którego znajduje się wartość prawdziwa. Jeśli założymy, że przedział ten jest przedziałem symetrycznym względem zmierzonej wartości y , wynik pomiaru zapisujemy w postaci:

$$\hat{y} \pm \Delta_{\max}$$

lub też:

$$\hat{y} \pm u_{\max}(\hat{y}),$$

gdzie Δ_{\max} (lub też u_{\max}) jest nazywane **niepewnością graniczną**.

Błąd pojedynczych pomiarów jest zmienną losową. Do jego analizy używamy narzędzi statystyki matematycznej. Tradycyjnie przyjmuje się, że błąd ma dwie składowe:

błąd systematyczny – błąd powtarzalny. Nie może być całkowicie wyeliminowany, ale często może być zredukowany. W przypadku pomiarów wykonanych w dokładnie takich samych warunkach, za pomocą tej samej aparatury i przez tego samego eksperymentatora możemy oczekiwać, iż błąd systematyczny będzie stały. Może to być błąd instrumentalny lub też błąd metody, wynikający z zastosowanego sposobu uzyskiwania wyniku.

błąd przypadkowy – błąd o charakterze losowym. Przypuszczalnie wynika z nieprzewidywalnych (stochastycznych) czasowych i przestrzennych zmian wielkości wpływających. Chociaż błąd przypadkowy nie może być skompensowany, to może zazwyczaj być zmniejszony przez zwiększenie liczby obserwacji, a jego wartość oczekiwana wynosi zero.

Oprócz dwóch wymienionych wyżej błędów może zdarzyć się jeszcze **błąd grubo**. Jest to błąd o wartości znacznie przewyższający wartość oczekiwaną w danej serii pomiarowej, wynikający najczęściej w niezamierzony sposób z przyczyn zależnych od eksperymentatora (niewłaściwe odczytanie wartości, pomyłka w zapisie wyniku, niewłaściwe użycie przyrządu pomiarowego) lub też od aparatury (uszkodzenie przyrządu, chwilowy zanik napięcia w sieci, zakłócenie zasilania itp.). Do eliminacji błędów grubych wykorzystujemy założenie, że wyniki pomiaru zachowują się zgodnie z rozkładem normalnym (Gaussa). Z tabeli 1 wynika, iż w przedziale $\bar{X} \pm 3s$ zawarte jest 99,73% wszystkich wyników. Wszystkie wyniki leżące poza tym przedziałem możemy uznać za wyniki obciążone błędem grubym.

Aby możliwe było jak najdokładniejsze oszacowanie mierzonej wartości oraz ocenienie wielkości występujących błędów dokonuje się serii jak największej liczby pomiarów tej samej wielkości w niezmiennych warunkach. Można wtedy skorzystać z modelu statystycznego uzyskanej serii pomiarowej. Podczas analizy wyników serii n pomiarów (y_1, y_2, \dots, y_n) używamy następujących pojęć statystycznych:

wartość średnia z n -elementowej serii:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad ,$$

odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru (próby):

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2}{n-1}} \quad ,$$

odchylenie standardowe średniej (serii, populacji):

$$s = \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2}{n(n-1)}} \quad ,$$

wariancja średniej arytmetycznej w serii:

$$\text{var} = \sigma^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2}{n(n-1)} \quad .$$

W przypadku pomiarów, dla których rozkład błędów jest zgodny z rozkładem Gaussa (tzw. rozkładem normalnym – większość spotykanych w praktyce przypadków), jako estymatę wartości prawdziwej przyjmuje się wartość średnią z serii pomiarów danej wielkości.

W literaturze możemy spotkać dwa sposoby wyznaczenia wyniku pomiaru. Pierwszy ze sposobów, zwany **rachunkiem błędów**, jest klasyczną metodą spotykaną w większości starszych podręczników. Drugi ze sposobów, zwany **rachunkiem niepewności** powstał w wyniku prac organizacji standaryzacyjnych na szczeblu międzynarodowym i jest sposobem ujętym we wszystkich normach. Jest on zalecany do przekazywania wyników pomiędzy laboratoriami na szczeblu krajowym i międzynarodowym oraz zalecany w handlu i rozliczeniach. Zasady rachunku niepewności opisane zostały w pozycji *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, opracowanym przez połączoną grupę roboczą organizacji standaryzacyjnych (wersja HTML w języku angielskim: <http://www.iso.org/sites/JCGM/GUM-JCGM100.htm>). W języku polskim pozycja ta została wydana w 1996 roku przez Główny Urząd Miar pod tytułem *Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik*.

Pomimo że Polskie Normy zalecają stosowanie rachunku niepewności, wciąż bardzo często w laboratoriach powszechnie stosuje się rachunek błędów. Z tego też względu metoda ta jest omówiona w instrukcji do ćwiczenia, mimo iż nie jest współcześnie uważana za metodę dokładną.

Pierwszym krokiem do wykonania pomiaru jest określenie mierzand – wielkości, która ma być zmierzona. Mierzand nie może być określony przez wartość, ale jedynie przez opis wielkości. Jednakże, zasadniczo, mierzand nie można opisać w sposób kompletny za pomocą ograniczonej ilości informacji. Zatem, w stopniu pozostawiającym miejsce na interpretację, niepełna definicja mierzand wprowadza do niepewności wyniku pomiaru składową, która może być lub też nie być, znaczącą dla wymaganej dokładności pomiaru.

1.1 Klasyczna teoria błędów

W klasycznej teorii błędów przyjmuje się, iż wartość błędu systematycznego jest wartością stałą. Używa się tu również często słowa **błąd** w znaczeniu „niepewność” (dotyczy to szczególnie starszej literatury). **Błąd graniczny** pomiaru wynosi:

$$\overline{\Delta_{\max}} = \Delta_{S \max} + \overline{\Delta_{R \max}} ,$$

gdzie $\Delta_{S \max}$ to graniczny błąd systematyczny podawany najczęściej w dokumentacji przyrządu pomiarowego, a $\Delta_{R \max}$ to graniczny błąd przypadkowy (lub **błąd rozszerzony**) równy:

$$\overline{\Delta_{R \max}} = k_p \cdot s.$$

Gdzie s to odchylenie standardowe serii. Współczynnik k_p nazywamy współczynnikiem rozszerzenia i jest on związany z rachunkiem prawdopodobieństwa. Przyjmuje zazwyczaj wartości z zakresu od 2 do 3. Zmienia się on w zależności od tego, z jakim prawdopodobieństwem (p) chcemy wiedzieć, że wartość prawdziwa znajduje się wewnątrz wyznaczonego przedziału (tzw. poziom ufności przedziału). W przypadku gdy liczba wykonanych pomiarów jest większa od 30, uznajemy, że błąd przypadkowy jest zgodny z rozkładem normalnym (zwanym także rozkładem Gaussa) i na tej podstawie określamy wartość współczynnika rozszerzenia k_p (tab. 1).

Tabela 1. Wartość współczynnika rozszerzenia k_p dla rozkładu normalnego i przedziału o poziomie ufności p .

Poziom ufności p (%)	Współczynnik rozszerzenia k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

W przypadku gdy liczba wykonywanych pomiarów jest mniejsza lub równa 30, przyjmujemy, że błąd przypadkowy jest zgodny z rozkładem t-Studenta. Wartość współczynnika k jest uzależniona od liczby stopni swobody rozkładu (ν). Jeśli mamy do czynienia z serią n pomiarów pojedynczej wielkości w niezmiennych warunkach, liczba stopni swobody rozkładu jest równa $n-1$ (tab. 2).

Przykład

Długość boku kwadratu zmierzono za pomocą suwmiarki o błędzie granicznym podanym przez producenta jako 0,02 mm. Wykonano 20 pomiarów i uzyskano wartość średnią $\bar{l} = 3,78$ mm i odchylenie standardowe serii $s = 0,03$ mm. Wyznaczyć błąd graniczny pomiaru na poziomie ufności 99%.

Błąd graniczny tego pomiaru wynosi:

$$\overline{\Delta_{\max}} = \Delta_{S_{\max}} + \overline{\Delta_{R_{\max}}} = 0,02 + k \cdot 0,03 .$$

Ponieważ liczba pomiarów jest mniejsza niż 30, korzystamy z rozkładu t-Studenta dla liczby stopni swobody równej $n - 1 = 19$ i odczytujemy z tablicy wartość współczynnika k na poziomie ufności 99%. Wynosi ona 2,86.

Otrzymujemy:

$$\overline{\Delta_{\max}} = \Delta_{S_{\max}} + \overline{\Delta_{R_{\max}}} = 0,02 + 2,86 \cdot 0,03 = 0,1058 \approx 0,11 .$$

Wynik pomiaru długości boku kwadratu na poziomie ufności 99% wynosi więc:

$$l = (3,78 \pm 0,11) \text{ mm}$$

Tabela 2. Wartość współczynnika rozszerzenia k_p dla rozkładu t-Studenta o ν stopniach swobody.

Liczba stopni swobody ν	Poziom ufności p (%)					
	68,27	90	95	95,45	99	99,73
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
29	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27



1.2 Teoria niepewności

Teoria niepewności opiera się na założeniu, iż błąd systematyczny wcale nie jest wartością stałą. Zmienia się on tak samo jak błąd przypadkowy i jest zmienną losową o ustalonym rozkładzie. Przeważnie przyjmuje się, iż błąd systematyczny zmienia się zgodnie z rozkładem prostokątnym, tzn. każda wartość błędów wewnątrz określonego przedziału jest jednakowo prawdopodobna (**tzw. randomizacja**). Dodatkowo przyjmuje się, że wartość oczekiwana tego błędu jest zerowa (**tzw. centryzacja**). Podsumowując, błąd systematyczny może być zarówno dodatni, jak i ujemny z równym prawdopodobieństwem w całym przedziale niepewności tego błędu.

Podczas szacowania niepewności według teorii niepewności używa się dwóch metod:

metoda typu A polega na tylko statystycznej ocenie serii obserwacji i dotyczy przeważnie błędów przypadkowych (choć czasem także systematycznych)

metoda typu B polega na wyznaczaniu niepewności przy wykorzystaniu innych danych niż dane statystyczne (np. karta katalogowa przyrządu, doświadczenie w podobnych pomiarach, znajomość zjawisk fizycznych które mają wpływ na mierzoną wielkość itp.). Metoda typu B odnosi się do błędów systematycznych.

Niepewnością standardową (u) nazywamy tutaj estymację niepewności pomiaru za pomocą odchylenia standardowego serii.

Niepewność rozszerzona definiuje przedział wokół wyniku pomiaru, od którego oczekuje się, że obejmie on dużą część rozkładu wartości. Definiowana jest podobnie jak w teorii błędów:

$$u_{\max} = k_p \cdot u_C.$$

Dla liczby pomiarów w danej serii większej niż 30 korzystamy z rozkładu normalnego (Gaussa), dla liczby pomiarów mniejszej lub równej 30 korzystamy z rozkładu t -Studenta lecz niestety ponieważ mamy do czynienia z dwiema zmiennymi losowymi (zarówno błąd przypadkowy jak i systematyczny), nie możemy przyjąć, że liczba stopni swobody rozkładu jest równa liczbie pomiarów (n) pomniejszonej o jeden. Do wyznaczenia liczby stopni swobody rozkładu niepewności rozszerzonej korzystamy z zależności:

$$\frac{u_C^4}{v} = \frac{u_B^4}{v_s} + \frac{u_A^4}{n-1},$$

gdzie u_A i u_B są odpowiednio niepewnościami standardowymi obliczonymi metodami typu A i metodami typu B. Natomiast v_s definiujemy jako stopień swobody niepewności typu B:

$$v_s = \frac{1}{2\delta_B^2},$$

gdzie δ_B jest względny błędem oszacowania niepewności typu B (wyrażonym w %).

W rachunku niepewności mamy do czynienia z sumowaniem się kwadratów niepewności:

$$u_C^2 = u_A^2 + u_B^2.$$

A więc ostatecznie możemy zapisać, iż niepewność rozszerzona jest równa:

$$u_{\max} = k_p \cdot \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

Przykład

Długość boku kwadratu zmierzono za pomocą suwmiarki o błędzie granicznym podanym przez producenta jako 0,02 mm. Wykonano 20 pomiarów i uzyskano wartość średnią $l = 3,78$ mm oraz odchylenie standardowe serii $s = 0,03$ mm. Wyznaczyć błąd graniczny pomiaru na poziomie ufności 99%.

Do oszacowania niepewności wynikającej z błędów przypadkowych w serii wykorzystamy metodę typu A. Niepewność ta (u_A) jest równa odchyleniu standardowemu z serii pomiarów.

Do oszacowania niepewności wynikającej z błędów narzędzia pomiarowego wykorzystamy metodę typu B. Deklarowany błąd przyrządu (Δ_{\max}) wynosi 0,02 mm. Ponieważ producent nie podaje żadnych innych danych przyjmujemy, że jest to niepewność rozszerzona, a błędy narzędzia pomiarowego mają rozkład prostokątny:

$$u_B = \sqrt{\frac{\Delta_{\max}^2}{k_{\text{rozkl}}}} = \sqrt{\frac{0,0004}{3}} = 0,01154 \text{ mm} .$$

Dla rozkładu prostokątnego $k_{\text{rozkl}} = 3$, dla rozkładu normalnego (Gausa) k_{rozkl} byłoby równe 9. Kwadrat niepewności standardowej wynosi:

$$u_C^2 = u_A^2 + u_B^2 = (0,03)^2 + (0,01154)^2 \approx 0,001 \text{ mm} .$$

Niepewność standardowa pomiaru wynosi więc:

$$u_C \approx 0,031 \text{ mm} .$$

Chcąc wyznaczyć niepewność rozszerzoną tego pomiaru, musimy wyznaczyć współczynnik k_p . Ponieważ mamy do czynienia z liczbą pomiarów mniejszą niż 30, korzystamy z rozkładu t-Studenta. Liczba stopni swobody dla niepewności liczonej metodą typu A jest równa $n - 1 = 19$, liczba stopni swobody dla niepewności liczonej metodą typu B jest równa:

$$v_s = \frac{1}{2\delta_B^2} = \frac{1}{2 \cdot (0,1)^2} = 50 .$$

W powyższych obliczeniach przyjęliśmy, że błąd oszacowania niepewności przyrządu pomiarowego przez producenta wynosi 10% (0,1).

Całkowita liczba stopni swobody jest równa:

$$\frac{u_C^4}{v} = \frac{u_B^4}{v_s} + \frac{u_A^4}{n-1} ,$$

$$\frac{(0,031)^4}{v} = \frac{(0,01154)^4}{50} + \frac{(0,03)^4}{19} ,$$

skąd po prostych przekształceniach arytmetycznych otrzymujemy $v = 22$. Dla poziomu ufności 99% i liczbie stopni swobody równej 22 z tabeli odczytujemy $k_p = 2,84$.

Ostatecznie niepewność rozszerzona pomiaru to:

$$u_{\max} = k_p \cdot u_C = 2,84 \cdot 0,031 \approx 0,088 \text{ mm} .$$

Wynik pomiaru możemy zapisać jako:

$$l = (3,78 \pm 0,09) \text{ mm} .$$



2. Przykładowe zadania

Zadanie 1.

Wykonując serię dziewięciu pomiarów uzyskano zbliżone wartości przyspieszenia ziemskiego, ale jeden wynik $6,8 \text{ m/s}^2$ znacznie odbiega od pozostałych. Odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru wynosi $= 0,3 \text{ m/s}^2$. Wartość tablicowa (średnia!) to $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Sprawdź, czy można odrzucić ten pojedynczy pomiar zgodnie z kryterium trzech sigma.

Zadanie 2.

Wyznacz błąd graniczny pomiaru średnicy pręta (d) na poziomie ufności a) 90% b) 95% c) 99%. Zapisz również przedziały, w których zawierają się poszczególne wyniki.

Po pięciokrotnym pomiarze pręta suwmiarką o deklarowanym błędzie przyrządu $0,01 \text{ cm}$ uzyskano następujące wyniki: $1,71; 1,73; 1,72; 1,72; 1,74 \text{ [cm]}$.

Zadanie 3.

Zmierzono n razy pewną grubość uzyskując średnią pomiarów wynoszącą $4,3342 \text{ mm}$ oraz odchylenie standardowe próby $0,00962 \text{ mm}$. Uzupełnij tabelkę dla poziomu ufności 90 %:

	współczynnik k_p
	błąd rozszerzony $\Delta R \text{ max}$
t-student $n=5$	
t-student $n=10$	
t-student $n=15$	
t-student $n=20$	
t-student $n=26$	
rozkład gaussa	

Zadanie 4.

Przy użyciu suwmiarki o dokładności $0,1 \text{ mm}$ zmierzono bok pręta o przekroju kwadratowym i otrzymano następujące wyniki w milimetrach: $12,5; 12,3; 12,6; 12,5; 12,3; 12,5; 12,7; 12,3; 12,7; 12,4; 12,3$. Oblicz długość boku pręta. Zapisz wynik pomiaru. Wyznacz błąd graniczny pomiaru na poziomie ufności 99%.