Grzegorz Wielgoszewski
Nr albumu 134651
Grupa SO 7:30
Stanowisko 13

Data wykonania ćwiczenia:
27 października 2012
Data sporządzenia sprawozdania:
3 listopada 2012

Proszę podać obie daty.

Proszę pamiętać o tych danych.

Ćwiczenie 1.
Metody określania niepewności pomiaru

Proszę pamiętać, że w ramach zajęć z metrologii wymagane jest napisanie sprawozdania **ręcznie**.

Spis przyrządów

Do wykonania ćwiczenia potrzebne było 12 kompletów, w których skład wchodziły:

- suwmiarka (błąd graniczny $\Delta_{\mathrm{max}} = \pm 0{,}01$ mm; przyjmujemy błąd oszacowania niepewności $\delta_{\mathrm{B}} = 10\%$),
- blaszka w kształcie trójkąta rozwartokątnego.

Przebieg i cel ćwiczenia

Każda z grup miała za zadanie zmierzyć długość boków oraz wysokości wszystkich ponumerowanych trójkątów odpowiednią suwmiarką. (...) W niniejszym sprawozdaniu przedstawione są wyniki dotyczące trójkąta nr 13, w tym pole trójkąta wyliczone z trzech niezależnych par bok-wysokość.

Proszę zwięźle opisać przebieg ćwiczenia.

Celem ćwiczenia było poznanie metod analizy niepewności pomiaru na przykładzie wyznaczania pola trójkąta.

Innymi słowy, w ćwiczeniu wykonujemy pośredni pomiar pola trójkąta.

Wyniki pomiarów

Wyniki pomiarów trójkąta nr 13, uzyskane przez poszczególne grupy, zamieszczone są w tabeli 1. Wartości parametrów statystycznych, podane w ostatnich trzech wierszach tabeli, zostały obliczone z następujących wzorów:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{1}$$

$$\hat{s}(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}, \tag{2}$$

$$s(\overline{x}) = \frac{\hat{s}(x_i)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}, \tag{3}$$

Proszę koniecznie przedstawić w dalszej części przykłady obliczania każdego z tych parametrów.

gdzie x to odpowiednia wielkość mierzona (długości boków a, b, c, długości wysokości h_a, h_b, h_c), n – liczba wykonanych pomiarów, $\overline{x}$ – średnia arytmetyczna wszystkich pomiarów wielkości x, $\hat{s}(x_i)$ – odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru, $s(\overline{x})$ – odchylenie standardowe średniej z pomiarów.

Tabela 1. Wyniki pomiarów boków i wysokości trójkąta nr 13

Proszę podać średnią z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

Nr grupy	a [mm]	b [mm]	c [mm]	h_a [mm]	h_b [mm]	h_c [mm]
1	70,38	105,82	136,28	104,98	69,72	53,72
2	70,58	105,66	136,30	104,00	69,14	53,68
3	70,40	105,56	136,32	103,52	69,10	53,74
4	70,40	105,60	136,32	103,94	69,30	53,70
5	70,40	105,64	136,32	104,08	69,32	53,74
6	70,42	103,74	136,34	103,22	69,86	53,76
7	70,56	105,94	136,36	123,45	69,44	54,00
8	70,60	105,68	136,22	104,34	69,48	53,68
9	70,46	105,56	136,32	103,92	69,26	53,66
10	70,34	105,70	136,50	103,84	69,42	53,74
11	70,60	104,45	136,36	104,96	70,28	53,46
12	70,42	105,56	136,90	103,92	69,26	53,66
$\overline{x}$	70,463	105,409	136,378	105,681	69,465	53,712
$\hat{s}(x_i)$	0,095	0,642	0,177	5,619	0,338	0,120
$s(\overline{x})$	0,027	0,185	0,051	1,622	0,098	0,035

Tabela 2. Wyniki z tabeli 1 po usunięciu wyniku obarczonego błędem grubym

Nr grupy	a [mm]	b [mm]	c [mm]	h_a [mm]	h_b [mm]	h_c [mm]
1	70,38	105,82	136,28	104,98	69,72	53,72
2	70,58	105,66	136,30	104,00	69,14	53,68
3	70,40	105,56	136,32	103,52	69,10	53,74
4	70,40	105,60	136,32	103,94	69,30	53,70
5	70,40	105,64	136,32	104,08	69,32	53,74
6	70,42	103,74	136,34	103,22	69,86	53,76
7	70,56	105,94	136,36	~~123,45~~	69,44	54,00
8	70,60	105,68	136,22	104,34	69,48	53,68
9	70,46	105,56	136,32	103,92	69,26	53,66
10	70,34	105,70	136,50	103,84	69,42	53,74
11	70,60	104,45	136,36	104,96	70,28	53,46
12	70,42	105,56	136,90	103,92	69,26	53,66
$\overline{x}$	70,463	105,409	136,378	104,065	69,465	53,712
$\hat{s}(x_i)$	0,095	0,642	0,177	0,533	0,338	0,120
$s(\overline{x})$	0,027	0,185	0,051	0,161	0,098	0,035

Analiza wyników

Eliminacja wyników obarczonych błędem grubym

Przyjmuję, że wyniki przedstawione w tabeli 1 zachowują się zgodnie z rozkładem normalnym. Zatem dla wielkości mierzonej x w przedziale $\langle \overline{x} - 3\hat{s}, \overline{x} + 3\hat{s} \rangle$ znajduje się 99,73% wyników. Tym samym wartości spoza tego przedziału uznaję za obarczone błędem grubym.

Gdyby nie był to rozkład normalny, musielibyśmy znaleźć inne kryterium dla błędu grubego.

Pamiętajmy, że jest to kryterium „robocze" – może się zdarzyć, że jego zastosowanie nie będzie prawidłowe.

Dla boku a granice przedziału będą następujące:

$$\begin{aligned}
a_{\text{min}} &= \overline{a} - 3 \cdot \hat{s}(a_i), \\
a_{\text{min}} &= 70{,}463 - 3 \cdot 0{,}095, \\
a_{\text{min}} &\approx 70{,}18\,\text{mm}; \\
a_{\text{max}} &= \overline{a} + 3 \cdot \hat{s}(a_i), \\
a_{\text{max}} &= 70{,}463 + 3 \cdot 0{,}095, \\
a_{\text{max}} &\approx 70{,}75\,\text{mm}.
\end{aligned}$$

Analogicznie obliczam przedziały dla pozostałych boków i dla wysokości. Są one następujące:

$$\begin{aligned}
a_{\text{min}} &= 70{,}18\,\text{mm}, & a_{\text{max}} &= 70{,}75\,\text{mm}; \\
b_{\text{min}} &= 103{,}48\,\text{mm}, & b_{\text{max}} &= 107{,}34\,\text{mm}; \\
c_{\text{min}} &= 135{,}85\,\text{mm}, & c_{\text{max}} &= 136{,}91\,\text{mm}; \\
h_a^{(\text{min})} &= 88{,}82\,\text{mm}, & h_a^{(\text{max})} &= 122{,}54\,\text{mm}; \\
h_b^{(\text{min})} &= 68{,}45\,\text{mm}, & h_b^{(\text{max})} &= 70{,}48\,\text{mm}; \\
h_c^{(\text{min})} &= 53{,}35\,\text{mm}, & h_c^{(\text{max})} &= 54{,}07\,\text{mm}.
\end{aligned}$$

Symbol jednostki zapisujemy **pismem prostym** (a nie pochyłym) i oddzielamy od wartości liczbowej **spacją**. Przy podawaniu wyniku nie stosujemy nawiasów kwadratowych, obejmujących symbol jednostki.

Wynikiem spoza tych przedziałów jest tylko wynik pomiaru długości wysokości h_a wykonany przez grupę 7. Po jego usunięciu parametry statystyczne mają następujące wartości:

Proszę zwrócić uwagę na to, że dla długości h_a wartość n z powodu usunięcia jednego wyniku zmalała z 12 do 11.

$$\begin{aligned}
\overline{h_a} &= \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{11} h_a^{(i)} \approx 104{,}065\,\text{mm}, \\
\hat{s}(h_a) &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{11} \left(h_a^{(i)} - \overline{h_a} \right)^2}{10}} \approx 0{,}533\,\text{mm}, \\
s(\overline{h_a}) &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{11} \left(h_a^{(i)} - \overline{h_a} \right)^2}{11 \cdot 10}} \approx 0{,}161\,\text{mm}.
\end{aligned}$$

Skorygowane wyniki przedstawione są w tabeli 2.

Niepewność pomiaru

Spojrzawszy na wyniki obliczeń odchylenia standardowego średniej s (tabela 2), można szacować, że występują wyraźne różnice niepewności pomiaru poszczególnych odcinków – s zawiera się w przedziale $\langle 0{,}027; 0{,}185 \rangle$. (…)

To ważne: **szacować**. Trzeba pamiętać, że odchylenie standardowe odpowiada wyłącznie niepewności liczonej metodą typu A oraz że w ostatecznym wyniku znaczenie ma też liczba stopni swobody.

Proszę spróbować napisać coś więcej.

Niepewność obliczona metodą typu A

Niepewność standardowa obliczona metodą typu A jest równa co do wartości odchyleniu standardowemu średniej. Tym samym na przykład:

$$u_{\text{A}}(a) = s(\overline{a}) = 0{,}027\,\text{mm}. \tag{4}$$

Wyniki dla pozostałych wielkości mierzonych podane są w 1. kolumnie tabeli 3.

Tabela 3. Wyniki obliczeń niepewności pomiaru

x	$u_\mathrm{A}(x)$ [mm]	$u_\mathrm{B}(x)$ [mm]	$u_\mathrm{c}(x)$ [mm]	n_x [1]	ν_x [1]	$k_{0,99}^{(x)}$ [1]	$U(x)$ [mm]
a	0,027	0,006	0,028	12	13	3,01	0,085
b	0,185	0,006	0,186	12	11	3,11	0,58
c	0,051	0,006	0,052	12	12	3,05	0,16
h_a	0,161	0,006	0,162	11	10	3,17	0,52
h_b	0,098	0,006	0,099	12	11	3,11	0,31
h_c	0,035	0,006	0,036	12	12	3,05	0,11

Niepewność obliczona metodą typu B

Niepewność standardowa obliczoną metodą typu B jest związana z błędem granicznym Δ_max, deklarowanym w protokole kalibracyjnym suwmiarki, następującą zależnością:

$$u_\mathrm{B}(x) = \sqrt{\frac{\Delta_\mathrm{max}^2}{3}}.$$

Ta zależność odpowiada rozkładowi prostokątnemu błędu aparatury – nie jest uniwersalna.

Każda wielkość była mierzona tym samym przyrządem, więc dla wszystkich boków i wszystkich wysokości niepewność typu B jest równa:

$$u_\mathrm{B}(x) = \sqrt{\frac{0{,}01^2}{3}} \approx 0{,}006\,\mathrm{mm}.$$

Tak obliczone $u_\mathrm{B}(x)$ wykorzystamy wraz z $u_\mathrm{A}(x)$ do obliczania $u_\mathrm{c}(x)$ – ważne jest, aby wartości $u_\mathrm{A}(x)$ i $u_\mathrm{B}(x)$ były podane z tą samą dokładnością, tzn. miały tę samą liczbę cyfr po przecinku.

Niepewność standardowa złożona

Niepewność standardową złożoną obliczam z wzoru

$$u_\mathrm{c}(x) = \sqrt{(u_\mathrm{A}(x))^2 + (u_\mathrm{B}(x))^2},$$

na przykład dla boku b:

$$u_\mathrm{c}(b) = \sqrt{(u_\mathrm{A}(b))^2 + (u_\mathrm{B}(b))^2} = \sqrt{(0{,}185)^2 + (0{,}006)^2} \approx 0{,}186\,\mathrm{mm}.$$

Pozostałe obliczone wartości podane są w 3. kolumnie tabeli 3.

Cały czas mamy tutaj wyniki pośrednie – warto podawać je „z zapasem", a do reguły podawania tylko dwóch cyfr znaczących niepewności zastosować się dopiero przy podawaniu ostatecznego wyniku.

Liczba stopni swobody

Liczba stopni swobody dla niepewności typu A to liczba pomiarów pomniejszona o 1 (czyli w niniejszym sprawozdaniu 11 albo 12 – według tabeli 3). Natomiast dla niepewności typu B liczba stopni swobody jest związana z przyrządem, czyli dla każdego z mierzonych odcinków wynosi:

$$\nu_s = \frac{1}{2\delta_\mathrm{B}^2} = \frac{1}{2 \cdot (0{,}1)^2} = 50.$$

Całkowitą liczbę stopni swobody, potrzebną do wyznaczenia współczynnika rozszerzenia k_p, obliczam z wzoru:

$$\nu_x = \frac{(u_c(x))^4}{\frac{(u_A(x))^4}{n_x - 1} + \frac{(u_B(x))^4}{\nu_s}},$$

czyli na przykład dla boku c:

$$\nu_c = \frac{(u_c(c))^4}{\frac{(u_A(c))^4}{n_c - 1} + \frac{(u_B(c))^4}{\nu_s}} = \frac{(0{,}052)^4}{\frac{(0{,}051)^4}{11} + \frac{(0{,}006)^4}{50}} \approx 12.$$

Pozostałe liczby stopni swobody ν_x podane są w 5. kolumnie tabeli 3.

Liczbę stopni swobody oznaczamy grecką literą „ni" – ν (Unicode: U+03BD), nie mylić z literą v.

Niepewność rozszerzona

Niepewność rozszerzoną obliczam z wzoru:

$$U(x) = k_p^{(x)} \cdot u_c(x),$$

gdzie $k_p^{(x)}$ to współczynnik rozszerzenia, wyznaczany dla odpowiedniej pary *(liczba stopni swobody, poziom ufności)* według rozkładu t Studenta. Przyjmuję $p = 99\% = 0{,}99$ i dla odpowiedniej liczby stopni swobody ν_x odczytuję $k_{0,99}^{(x)}$ z tabeli 2 na s. 6 instrukcji do ćwiczenia.

Do obliczania współczynnika rozszerzenia można też wykorzystać arkusz kalkulacyjny. Przykładowo w OpenOffice.org wartość $k_{0,99}$ zwraca funkcja ROZKŁAD.T.ODW(0,01;[*adres komórki z liczbą stopni swobody*]).

Dla wysokości h_a ($\nu_{h_a} = 10$) otrzymuję:

$$\begin{aligned} k_{0,99}^{(h_a)} &= 3{,}17\ ; \\ U(h_a) &= k_{0,99}^{(h_a)} \cdot u_c(h_a) = 3{,}17 \cdot 0{,}162\ , \\ U(h_a) &\approx 0{,}52\,\mathrm{mm} \quad (p = 0{,}99). \end{aligned}$$

Pozostałe niepewności rozszerzone $U(x)$ podane są w 7. kolumnie tabeli 3.

Pamiętajmy o zaokrąglaniu niepewności **w górę** do dwóch cyfr znaczących.

Wyniki pomiarów długości boków i wysokości

Boki i wysokości trójkąta nr 13 mają długość:

$$\begin{aligned} a &= (70{,}463 \pm 0{,}085)\,\mathrm{mm}, \\ b &= (105{,}41 \pm 0{,}58)\,\mathrm{mm}, \\ c &= (136{,}38 \pm 0{,}16)\,\mathrm{mm}, \\ h_a &= (104{,}07 \pm 0{,}52)\,\mathrm{mm}, \\ h_b &= (69{,}47 \pm 0{,}31)\,\mathrm{mm}, \\ h_c &= (53{,}71 \pm 0{,}11)\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

przy poziomie ufności $p = 99\%$.

Obliczenie pola trójkąta

Pole powierzchni trójkąta wyznaczam z wzoru:

$$P_x = \frac{1}{2} x h_x,$$

gdzie x jest bokiem, na który opuszczona jest wysokość h_x.

Niepewność tak obliczonego pola powierzchni wyznaczam z prawa propagacji niepewności:

$$
\begin{aligned}
U(P_x) &= \sqrt{\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}\cdot U(x)\right)^2 + \left(\frac{\partial P_x}{\partial h_x}\cdot U(h_x)\right)^2},\\
U(P_x) &= \sqrt{\frac{h_x^2}{4}\cdot (U(x))^2 + \frac{x^2}{4}\cdot (U(h_x))^2},\\
U(P_x) &= \frac{1}{2}\sqrt{(h_x\cdot U(x))^2 + (x\cdot U(h_x))^2}.
\end{aligned}
$$

Dla pary (c, h_c) pole powierzchni P_c wynosi więc:

$$
\begin{aligned}
P_c &= \frac{1}{2} c h_c\ ,\\
P_c &= \frac{1}{2}\cdot 136{,}38\cdot 53{,}71\ ,\\
P_c &\approx 3662{,}48\,\mathrm{mm}^2;
\end{aligned}
$$

a jego niepewność

$$
\begin{aligned}
U(P_c) &= \frac{1}{2}\sqrt{(h_c\cdot U(c))^2 + (c\cdot U(h_c))^2},\\
U(P_c) &= \frac{1}{2}\sqrt{(53{,}71\cdot 0{,}16)^2 + (136{,}38\cdot 0{,}11)^2},\\
U(P_c) &\approx 8{,}64\,\mathrm{mm}^2 \approx 8{,}7\,\mathrm{mm}^2.
\end{aligned}
$$

Zatem, wraz z analogicznie obliczonymi P_a i P_b, otrzymujemy następujące wyniki pomiaru pola powierzchni trójkąta nr 13:

$$
\begin{aligned}
P_a &= (3667 \pm 19)\,\mathrm{mm}^2,\\
P_b &= (3661 \pm 26)\,\mathrm{mm}^2,\\
P_c &= (3662{,}5 \pm 8{,}7)\,\mathrm{mm}^2;
\end{aligned}
$$

przy poziomie ufności $p = 99\%$.

Może warto spróbować obliczyć pole z wzoru Herona? Oczywiście wraz z niepewnością.

Uwagi i wnioski

Proszę skomentować uzyskane wyniki. Warto między innymi zwrócić uwagę na różnice niepewności pomiaru różnych boków i wysokości czy też różnice niepewności wyznaczenia pola z różnych par *(bok, wysokość)*.
Czy wiadomo, skąd się biorą te różnice?
I czy wyniki pomiaru pola powierzchni są ze sobą zgodne?
Jak to wygląda na osi liczbowej?

Niniejsze przykładowe sprawozdanie przygotowałem w systemie LaTeX z wykorzystaniem m. in. pakietów *siunitx* i *todonotes* oraz zestawu fontów *Antykwa Toruńska* autorstwa Janusza M. Nowackiego, wzorowanych na czcionce zaprojektowanej przez Zygfryda Gardzielewskiego.