

Przetwarzanie sygnałów

Ćwiczenie 6

Filtry o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (NOI)

dr hab. inż. Tomasz Piasecki, prof. PWr (tomasz.piasecki@pwr.edu.pl)

Spis treści

1	Wprowadzenie	1
1.1	Filtry jednobiegunowe	1
1.2	Filtry wąskopasmowe	2
1.3	Filtry Czebyszewa	3
2	Pytania na kartkówkę	4
3	Funkcje stworzone w trakcie realizacji poprzednich ćwiczeń	4
4	Zadania do realizacji	5
4.1	Implementacja filtra NOI i obliczające odpowiedzi filtra	5
4.2	Funkcje wyliczające współczynniki filtrów NOI	6
4.3	Filtry Czebyszewa	7



Katedra
Nanometrologii

Wydział Elektroniki, Fotoniki i Mikrosystemów
Politechnika Wrocławska

1 Wprowadzenie

Do realizacji ćwiczenia 6 niezbędne są podstawowe wiadomości o filtracji cyfrowej zawarte w rozdziale 1 instrukcji do ćwiczenia 5.

Zasadniczą różnicą między filtrami o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (NOI) a filtrami o skończonej odpowiedzi impulsowej (SOI) jest fakt, że do filtracji za pomocą filtrów SOI wykorzystuje się tylko próbki pobudzenia, natomiast filtry NOI wykorzystują do obliczeń wartości próbek odpowiedzi, które algorytm filtracji wygenerował w przeszłości. Stąd filtry NOI nazywane są często filtrami rekursywnymi.

Poniższe równanie jest jedną z możliwych wyrażen definiujących sposób przetwarzania informacji przez filtr NOI.

$$\begin{aligned} a_0 y[n] = & b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_{M_b-1} x[n-M_b+1] + \\ & - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \dots - a_{M_a-1} y[n-M_a+1] \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: n – numer próbki, b_k – współczynnik k dla sygnału wejściowego, a_k – współczynnik k dla sygnału wyjściowego, M_a to liczba współczynników a , M_b to liczba współczynników b . Ta postać jest wykorzystywana przez funkcje pakietu Origin związane z projektowaniem filtrów NOI.

Filtry NOI charakteryzują się gorszymi parametrami użytkowymi takimi jak tłumienie w paśmie zaporowym czy zafalowania w paśmie przepustowym, ale ze względu na niewielką liczbę współczynników, redukującą znacznie ilość niezbędnych obliczeń, odznaczają się znacznie większą szybkością działania w porównaniu z filtrami SOI.

Cyfrowe filtry rekursywne projektowane są z wykorzystaniem transformaty Z . Transformata ta umożliwia przekształcenie równań różnicowych (takich jak (1)) na równania algebraiczne. Jest to możliwe dzięki podanej niżej właściwości przekształcenia Z .

$$\text{jeżeli } Z\{x[n]\} = X(z), \text{ to } Z\{x[n-k]\} = z^{-k} X(z) \quad (2)$$

Wówczas równanie zapisane w dziedzinie czasu (numerów próbek) w postaci:

$$y[n] = 0,1x[n] + 0,9y[n-1] \quad (3)$$

może być przekształcone do postaci w dziedzinie zmiennej z :

$$Y(z) = 0,1X(z) + 0,9z^{-1}Y(z) \quad (4)$$

Wyrażenie to można następnie przekształcić w taki sposób, aby uzyskać transmitancję $H(z) = Y(z)/X(z)$:

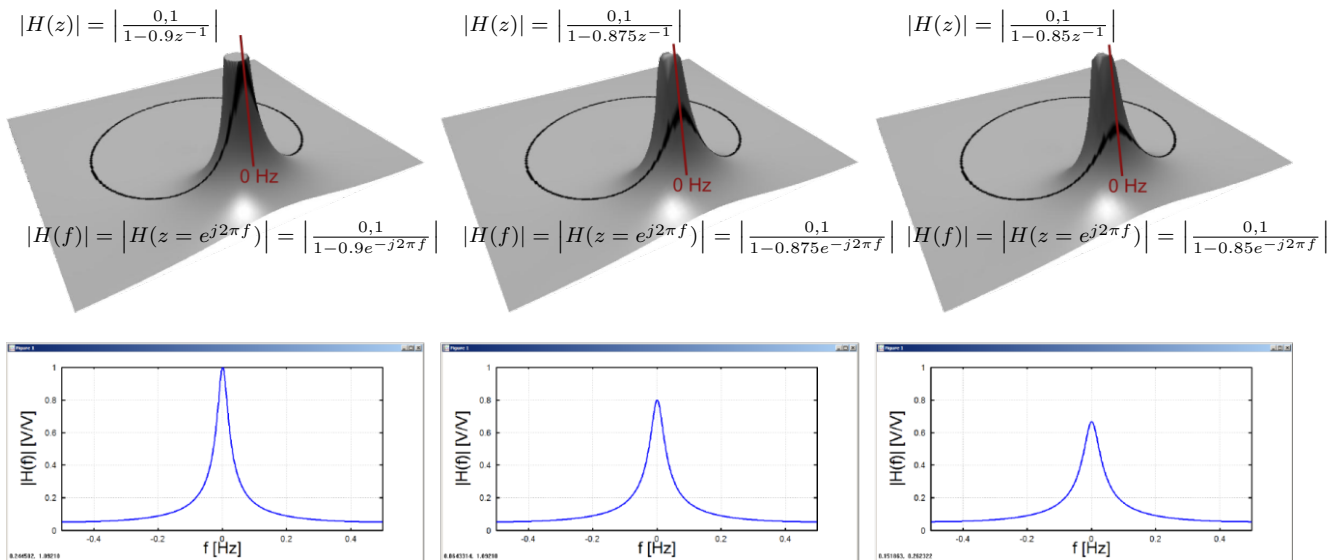
$$H(z) = \frac{0,1}{1 - 0,9z^{-1}} = \frac{0,1z}{z - 0,9} \quad (5)$$

Transmitancja $H(z)$ jest zespoloną funkcją wymierną (zarówno z jak i $H(z)$ są liczbami zespolonymi). Wielomiany licznika i mianownika mają swoje miejsca zerowe. Położenie tych punktów osobliwych w przestrzeni zmiennej z wpływa na odpowiedź częstotliwościową filtru. W przestrzeni zmiennej z odpowiedź częstotliwościowa znajduje się na okręgu jednostkowym o promieniu 1 (rys. 1).

1.1 Filtry jednobiegunowe

Filtr jednobiegunowy posiada jeden biegun na płaszczyźnie transformaty Z . Do jego budowy za pomocą metody rekursywnej stosuje się tylko dwa współczynniki dla filtru dolnoprzepustowego:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 - x \\ a_0 &= 1 \\ a_1 &= -x \end{aligned} \quad (6)$$



Rysunek 1: Ilustracja wpływu położenia bieguna filtra na charakterystykę częstotliwościową $H(f)$ (wykresy przedstawiają moduł transmitancji i odpowiedzi częstotliwościowej): z lewej strony biegun położony jest najbliżej linii okręgu jednostkowego, z prawej strony najdalej. Żeby filtr był stabilny, wszystkie jego bieguny muszą znajdować wewnątrz tego okręgu. Im więcej biegunów, tym łatwiej kształtować charakterystykę filtra.

oraz trzy współczynniki dla filtra górnoprzepustowego:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= (1 + x)/2 \\
 b_1 &= -(1 + x)/2 \\
 a_0 &= 1 \\
 a_1 &= -x
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

gdzie parametr x opisuje szybkość zmian między kolejnymi próbkami i powinien mieścić się w przedziale $(0, 1)$. Z częstotliwością odcięcia f_c (równą od 0 do $0,5$ częstotliwości próbkowania) filtra łączy go zależność w postaci

$$x = e^{-2\pi f_c}
 \tag{8}$$

Odpowiedź skokowa tego filtra nie ma przerzutu i dzwonienia. Parametr x umożliwia projektowanie filtra o zadanej stałej czasowej narastania d :

$$x = e^{-\frac{1}{d}}
 \tag{9}$$

wyrażonej w liczbie próbek. Aby poprawić charakterystykę częstotliwościową filtra jednobiegunowego można przeprowadzić filtrację wielokrotną.

1.2 Filtry wąskopasmowe

Filtry wąskopasmowe należą do grupy filtrów NOI, które umożliwiają wydzielenie bardzo wąskiego pasma częstotliwości z widma sygnału wejściowego. Dzielą się na filtry pasmowoprzepustowe i pasmowozaporowe. Ich współczynniki można wyznaczyć ze wzorów:

$$K = \frac{1 - 2R \cos(2\pi f) + R^2}{2 - 2 \cos(2\pi f)}
 \tag{10}$$

$$R = 1 - 3BW
 \tag{11}$$

Parametry filtru pasmowoprzepustowego:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 - K \\ b_1 &= 2(K - R) \cos(2\pi f) \\ b_2 &= R^2 - K \\ a_0 &= 1 \\ a_1 &= -2R \cos(2\pi f) \\ a_2 &= R^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Parametry filtru pasmowozaporowego:

$$\begin{aligned} b_0 &= K \\ b_1 &= -2K \cos(2\pi f) \\ b_2 &= K \\ a_0 &= 1 \\ a_1 &= -2R \cos(2\pi f) \\ a_2 &= R^2 \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie: BW - szerokość pasma (zaporowego lub przepustowego), f - częstotliwość środkowa filtru (częstotliwość środka pasma zaporowego lub przepustowego). Podobnie jak w przypadku filtrów jednobiegunowych, w celu poprawienia charakterystyki częstotliwościowej filtrów wąskopasmowych można łączyć je kaskadowo.

UWAGA: Zarówno częstotliwość odcięcia, jak i pasmo przenoszenia filtru definiuje się jako ułamek częstotliwości próbkowania, więc ich wartości muszą mieścić się w przedziale od 0 do 0,5.

1.3 Filtry Czebyszewa

Filtry Czebyszewa charakteryzują się szybką charakterystyką opadania (wąskim pasmem przejściowym) i często są wykorzystywane do rozdzielania pasm częstotliwości. Niekorzystnym zjawiskiem występującym w odpowiedzi częstotliwościowej filtru Czebyszewa są zafalowania w paśmie przepustowym, przy czym im większe są zafalowania, tym węższe jest pasmo przejściowe filtru. Bez zwiększania poziomu zafalowań można zmniejszyć szerokość pasma przejściowego poprzez zwiększenie liczby biegunów filtru.

Filtry Czebyszewa projektowane są metodą transformacji biliniowej na podstawie ich analogowych prototypów. Z kolei analogowy filtr Czebyszewa to filtr, który posiada bieguny rozmieszczone równomiernie na lewym półokręgu o środku w punkcie (0,0) przestrzeni s transformaty Laplace'a.

Procedura projektowania może być zrealizowana przez algorytm numeryczny, dlatego filtry tego typu projektuje się z wykorzystaniem specjalistycznego oprogramowania. W środowisku Octave można wykorzystać funkcję `cheby1`.

Projekt filtru Czebyszewa wymaga podania czterech parametrów:

- rodzaju odpowiedzi (dolno lub górnoprzepustowej, pasmowoprzepustowej czy pasmowo zaporowej),
- częstotliwości odcięcia (definiowana od 0 do 0,5 częstotliwości próbkowania),
- poziomu zafalowań w paśmie przepustowym wyrażonej w dB lub %,
- liczby biegunów.

Poniżej przedstawiono przykłady użycia funkcji `cheby1` środowiska Octave.

- `[b, a] = cheby1(n, Rp, Wc)` projektuje filtr dolnoprzepustowy przy czym: n - rząd filtru, Rp - poziom zafalowań w dB, Wc - częstotliwość odcięcia jako ułamek połowy częstotliwości próbkowania (np. 0,5 oznacza 0,25 częstotliwości próbkowania),
- `[b, a] = cheby1(n, Rp, Wc, 'high')` filtr górnoprzepustowy.
- `[b, a] = cheby1(n, Rp, [Wl, Wh])` projektuje filtr pasmowoprzepustowy, w którym pasmo przepustowe jest od Wl do Wh (wyrażone w ułamku połowy częstotliwości próbkowania, wartości 0,4 i 0,6 oznaczają pasmo przepustowe od 0,2 do 0,3 częstotliwości próbkowania),
- `[b, a] = cheby1(n, Rp, [Wl, Wh], 'stop')` filtr pasmowozaporowy.

Najczęściej zawartość procentową ustala się na poziomie 0,5%, natomiast w skali logarytmicznej typowo stosuje się 0,05 dB.

2 Pytania na kartkówkę

1. Jakie wartości będą na osi odciętych dla charakterystyk czasowych a jakie dla częstotliwościowych?
2. Jak będą wyglądały osie odciętych charakterystyk czasowych i częstotliwościowych filtrów cyfrowych przetwarzających sygnały próbkowane z częstotliwością 1 kHz?
3. Jaką częstotliwość odcięcia w hercach będzie miał dolnoprzepustowy filtr NOI, jeżeli zaprojektowano go dla częstotliwości odcięcia znormalizowanej $f_c=0,1$, a częstotliwość próbkowania filtrowanego sygnału wynosi $f_s=1\text{kHz}$?
4. Dla jakiej częstotliwości odcięcia należy zaprojektować dolnoprzepustowy filtr NOI, aby z sygnału próbkowanego z częstotliwością $f_s=1\text{kHz}$ usunąć wszystkie składowe powyżej 200 Hz?
5. Jak poprawić tłumienie w paśmie zaporowym filtru jednobiegunowego?
6. Zaprojektuj filtr jednobiegunowy górnoprzepustowy o częstotliwości odcięcia 0,1.
7. Zaprojektuj filtr jednobiegunowy dolnoprzepustowy o częstotliwości odcięcia 0,2.
8. Zaprojektuj filtr jednobiegunowy górnoprzepustowy o stałej czasowej równej 3 próbkom.
9. Zaprojektuj filtr jednobiegunowy dolnoprzepustowy o stałej czasowej równej 2 próbkom.
10. Dany jest filtr NOI o współczynnikach: $b_0 = 0,75$, $a_0 = 1$, $a_1 = -0,25$. Oblicz ręcznie wartości pierwszych pięciu próbek jego odpowiedzi impulsowej i skokowej.
11. Wykreśl odpowiedź skokową filtra z poprzedniego zadania. Na podstawie wykresu oszacuj wartość stałej czasu narastania odpowiedzi skokowej tego filtra wyrażoną w liczbie próbek.
12. Jak zmniejszyć szerokość pasma przejściowego filtru Czebyszewa bez zwiększania poziomu zafalowań?

Uwaga. Wartości liczbowe podane w pytaniach są przykładowe. Na kartkówce podobne zadania będą zawierały inne dane.

3 Funkcje stworzone w trakcie realizacji poprzednich ćwiczeń

`fir_filter(x, b)` - implementacja filtra FIR
`fir_freq_resp(b, N, fs)` - obliczenie odpowiedzi częstotliwościowej filtra FIR
`fir_imp_resp(b, N, fs)` - obliczenie odpowiedzi impulsowej filtra FIR
`fir_sinc(fc, M, wnd)` - zaprojektowanie filtra FIR metodą okienkowanej funkcji sinc
`fir_step_resp(b, N, fs)` - obliczenie odpowiedzi skokowej filtra FIR
`gen_cfreq(N, fs)` - generacja częstotliwości składowych widma sygnału zespolonego
`gen_delta(time)` - generacja delty Kroeneckera
`gen_gauss(time, u, s)` - generacja impulsu Gaussa
`gen_rfreq(N, fs)` - generacja częstotliwości składowych widma sygnału rzeczywistego
`gen_sin(time, fsin, A, fi)` - generacja sygnału harmonicznego
`gen_time(N, fs)` - generacja czasów próbek
`gen_triangle(time, A, tr, tf)` - generacja impulsu trójkątnego
`sig_conv(x,y)` - obliczenie splotu sygnałów
`sig_delay_N(x, Nd)` - opóźnienie sygnału
`sig_fft(x)` - obliczenie widma zespolonego rozłożonego symetrycznie wokół składowej $k = 0$
`sig_irdft(x)` - odwrotna DFT sygnału rzeczywistego
`sig_rdft(x)` - DFT sygnału rzeczywistego
`spec_uarg(y)` - obliczenie rozwiniętego widma fazowego

4 Zadania do realizacji

W trakcie zajęć należy rozwiązać podane poniżej zadania. Za każde zadanie można otrzymać wskazaną liczbę punktów pod warunkiem, że zostanie ono całkowicie poprawnie zrealizowane.

4.1 Implementacja filtra NOI i obliczające odpowiedzi filtra

Zadanie polega na napisaniu funkcji postaci:

```
function y = iir_filter(b, a, x)
# definicja ciała funkcji
endfunction
```

która będzie realizowała filtrowanie rekursywne próbek wejściowych x z wykorzystaniem współczynników a oraz b . Wyniki działania funkcji należy przedstawić prezentując charakterystyki filtrów projektowanych w zadaniu 3.

Należy napisać również następujące funkcje obliczające odpowiedzi filtra NOI:

```
function [y,t]=iir_step_resp(b, a, N, fs)
#definicja ciała funkcji
endfunction
```

obliczającą odpowiedź skokową filtra NOI o współczynnikach podanych w tablicach a i b . Długość odpowiedzi skokowej (ilość próbek) określa argument N , natomiast fs jest częstotliwością próbkowania. t powinno być osią odciętych/poziomą odpowiedzi skokowej.

```
function [y, t]=iir_imp_resp(b, a, N, fs)
#definicja ciała funkcji
endfunction
```

obliczającą odpowiedź impulsową filtra NOI o współczynnikach podanych w tablicach a i b . Ilość próbek odpowiedzi impulsowej określa argument N , natomiast fs jest częstotliwością próbkowania. t powinno być osią odciętych/poziomą odpowiedzi impulsowej.

```
function [mH, fiH, mHdB, f]=iir_freq_resp(b, a, N, fs)
#definicja ciała funkcji
endfunction
```

obliczającą odpowiedź częstotliwościową filtra NOI o współczynnikach podanych w tablicach a i b (mH - odpowiedź amplitudowa liniowa, $mHdB$ - odpowiedź amplitudowa w dB, fiH - odpowiedź fazowa z fazą rozwiniętą, f - wspólna oś odciętych/pozioma wszystkich odpowiedzi częstotliwościowych). Liczba próbek odpowiedzi określa argument N , natomiast fs jest częstotliwością próbkowania. Do rozwijania fazy można wykorzystać funkcję z ćwiczenia 3. Oczywiście, wykorzystać można jako wzór opracowane do poprzedniego ćwiczenia funkcje obliczające odpowiedzi filtra SOI.

Prawidłowość działania powyższych funkcji sprawdź na przykładzie kilku filtrów NOI o znanych wartościach współczynników. Wykorzystać można do tego:

- filtry zaprojektowane ręcznie na podstawie wzorów z punktów 1.1 i 1.2
- filtry projektowane na wykładzie,
- filtry będące zadaniami w zbiorze zadań rachunkowych do kursu, najlepiej rozwiązując samodzielnie te zadania bądź po prostu korzystając z odpowiedzi,
- filtr dolnoprzepustowy o częstotliwości odcięcia 0,1, którego współczynniki to: $b_0 = b_1 = 0,238$, $a_0 = 1$, $a_1 = -0,524$

Oceń, czy wykreślone charakterystyki mają pożądaną przebieg, to znaczy między innymi:

- czy rodzaj filtra jest potwierdzony kształtem charakterystyki,
- czy zakres częstotliwości na osi odciętych jest prawidłowy,
- czy zakres rzędnych pozwala na znalezienie na wykresie punktów charakterystycznych - jeśli nie spróbuj użyć polecenia `yylim`, która użyta bezpośrednio po poleceniu `plot` ustala zakres wartości przedstawionych na osi rzędnych wykresu, np `yylim([-10, 10])`; powoduje ograniczenie wartości na osi rzędnych do przedziału od -10 do 10.

Sprawdź też czy z tych charakterystyk potrafisz odczytać:

- czy częstotliwość graniczna filtra zgadza się z projektowaną,
- czy odpowiedź skokowa wskazuje na zgodność z założoną stałą czasu narostu (patrz p. 1.1),
- gdzie zaczyna się pasmo zaporowe, jeśli założyć minimalne tłumienie w paśmie zaporowym na jakąś wartość (np -20 dB, -40 dB czy inną)

Przygotuj się do szybkiego zastosowania opracowanych funkcji do demonstracji działania filtrów o innych współczynnikach, podanych przez prowadzącego w czasie zajęć. Sprawdź, czy działają one prawidłowo zarówno gdy podasz parzystą jaki i nieparzystą liczbę próbek N .

Za prawidłowe wykonanie zadania otrzymasz 2 pkt.

4.2 Funkcje wyliczające współczynniki filtrów NOI

Napisz funkcje w postaci:

```
function [b, a] = iir_onepole_LPF(fc)
# definicja ciała funkcji
endfunction
```

oraz

```
function [b, a] = iir_onepole_HPF(fc)
# definicja ciała funkcji
endfunction
```

zwracające współczynniki jednobiegunowych filtrów dolno- i górnoprzepustowego o częstotliwości odcięcia fc .

Napisz funkcję:

```
function [b, a] = iir_onepole_LPF_tc(d)
# definicja ciała funkcji
endfunction
```

która będzie wyznaczać współczynniki dolnoprzepustowego filtra jednobiegunowego o stałej czasu narostu wynoszącej d próbek.

Napisz funkcje w postaci:

```
function [b, a] = iir_narrow_BF(fc, BW)
# definicja ciała funkcji
endfunction
```

oraz

```
function [b, a] = iir_narrow_NF(fc, BW)
# definicja ciała funkcji
endfunction
```

wyznaczające współczynniki, odpowiednio, pasmowoprzepustowego i pasmowozaporowego filtra wąskopasmowego, gdzie f_c to znormalizowana częstotliwość środkowa, a BW to szerokość pasma przenoszenia filtra.

Testując te funkcje w trakcie ich przygotowania sprawdź, czy wykreślone charakterystyki częstotliwościowe lub czasowe wskazują na otrzymanie filtra o właściwościach zgodnych z wartościami parametrów przekazywanych do testowanych funkcji. Zaobserwuj, jak zmieniają się te charakterystyki gdy zmieniasz wartości częstotliwości odcięcia bądź środkową czy szerokość pasma filtra.

W trakcie zajęć należy zaprezentować wszystkie charakterystyki filtrów dla parametrów wskazanych przez prowadzącego wykazując ich prawidłowy, zgodny ze wskazanymi parametrami przebieg.

Za wykonanie ćwiczenia otrzymasz 1 pkt.

4.3 Filtry Czebyszewa

Zadanie czwarte polega na porównaniu amplitudowych charakterystyk częstotliwościowych (w decybelach) filtrów Czebyszewa pracujących z taką samą (podaną przez prowadzącego) częstotliwością odcięcia. Porównaj ze sobą charakterystyki:

- trzech filtrów Czebyszewa: dwu-, cztero- i sześciobiegunowego o poziomie zafalowań w paśmie przepustowym 0,05 dB
- trzech sześciobiegunowych filtrów Czebyszewa różniących się poziomem zafalowań w paśmie przepustowym, który wskaże prowadzący zajęcia (np. 0,05 dB, 0,1 dB, 0,5 dB)

Przyjmując, że granicą pasma zaporowego jest -40 dB wyznacz i porównaj ze sobą:

- szerokość pasma przejściowego
- poziom zafalowań w paśmie przepustowym

tych filtrów.

Porównaj charakterystyki tych filtrów.

Za wykonanie ćwiczenia otrzymasz 2 pkt.