



Politechnika Wrocławska

Przetwarzanie Sygnałów

Zbiór zdań

dr hab. inż. Tomasz Piasecki, prof. PWr
tomasz.piasecki@pwr.edu.pl

Wydanie 1
13 października 2022

Spis treści

1	Wstęp	2
2	Zadania	3
1	Sygnały	3
2	Transformata Fouriera	3
3	Systemy Liniowe Stacjonarne	4
4	Filtry cyfrowe	4
3	Odpowiedzi	6
1	Sygnały	6
2	Transformata Fouriera	7
3	Systemy Liniowe Stacjonarne	7
4	Filtry cyfrowe	8
4	Wskazówki i podpowiedzi	9
1	Sygnały	9
2	Transformata Fouriera	9
3	Systemy Liniowe Stacjonarne	9
4	Filtry cyfrowe	9

Rozdział 1

Wstęp

Na pierwszym stopniu studiów kierunku Elektronika i Telekomunikacja na Wydziale Elektroniki Mikrosystemów i Fotoniki Politechniki Wrocławskiej realizowany jest kurs Przetwarzanie Sygnałów. Niniejszy zbiór zadań zawiera przykładowe zadania obliczeniowe i projektowe stanowiące pomoc w przygotowaniu się do egzaminu bądź ćwiczeń laboratoryjnych.

Opracowanie podzielono na trzy rozdziały. Pierwszy zawiera treści pytań, drugi odpowiedzi. Odpowiedzi do niektórych pytań zawarto w rozdziale 3.

Rozdział 2

Zadania

1 Sygnały

1.1 Narysuj przebiegi czasowe sygnałów ciągłych x_1 , x_2 i ich spłotu:

- a) $x_1(t) = \delta(t - 2)$, $x_2(t) = \Lambda\left(\frac{t}{2}\right)$
- b) $x_1(t) = \delta(t) + \delta(t - 1) + \delta(t - 2)$, $x_2 = 0.5\Pi(2t)$
- c) $x_1 = \Lambda\left(\frac{t}{2}\right) \cdot 1\left(\frac{t}{2}\right)$, $x_2(t) = 4\Pi(t - 1)$

1.2 Oblicz wartości próbek sygnału $y[n]$ będącego spłotem sygnałów dyskretnych $x_1[n] = [1, 4, 7, 0, 5, 3, 1]$ i $x_2[n] = [1, 4, 5, 2]$.

1.3 Dane są sygnały impulsowe o następujących modelach:

- $x_1(t) = \Pi(t - 2)$,
- $x_2(t) = \Pi(t - 3) \cdot 1(t - 3)$,
- $x_3(t) = \Lambda\left(\frac{t+2}{2}\right) \cdot 1(t + 2)$,
- $x_4(t) = \sin(\pi t) \cdot \Pi(t - 0, 5)$.

Narysuj ich przebiegi w funkcji czasu i oblicz ich $[x]$, $\langle x \rangle$, E_x , $\langle x^2 \rangle$.

1.4 Dane są sygnały ciągłe o następujących modelach:

- $x_1(t) = \frac{2}{3} + \sin^2(3\pi t)$
- $x_2(t) = 1(t) \cdot 3e^{-\frac{t}{2}} \sin 10\pi t$

Oblicz ich moc oraz wartość skuteczną.

1.5 Jaka ilość danych (w bajtach lub jednostkach pochodnych) jest potrzebna do przedstawienia stereofonicznego sygnału audio trwającego 3 minuty i 23 sekundy, próbkowanego z częstotliwością 44100 Hz kodowanego 16-bitowo?

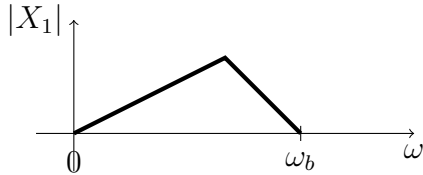
1.6 Ile czasu upłynie od rozpoczęcia próbkowania do pobrania $n = 8190$ próbki, jeżeli częstotliwość próbkowania to 14 kHz?

2 Transformata Fouriera

2.1 Jaką najmniejszą liczbę składowych widma można obliczyć dla przedstawienia pełni informacji o sygnale rzeczywistego o długości $N = 196$? Jaka będzie częstotliwość w hercach składowych $k = 1$, $k = 7$, $k = 21$, jeżeli częstotliwość próbkowania wynosiła 2940 Hz?

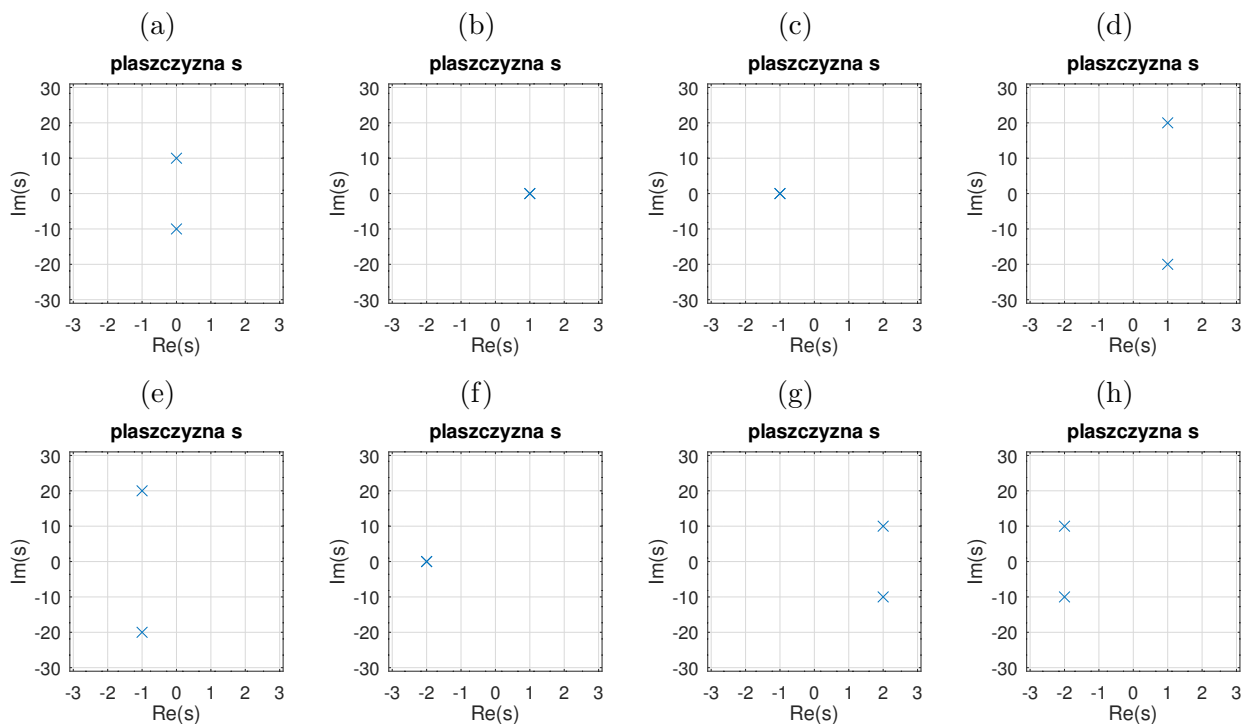
2.2 Dany jest sygnał $x[n] = [2, 4, 8, 4, 2, 6]$. Oblicz jego dyskretną transformatę Fouriera $y[k]$.

2.3 Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego $x_1(t)$ przedstawiono na wykresie. Jak będzie wyglądało widmo częstotliwości sygnału $x_2(t) = \cos(\omega_m t)$ zmodulowanego amplitudowo sygnałem x_1 ? Jaką najmniejszą wartość może mieć ω_m aby nie doszło do zniekształceń?



3 Systemy Liniowe Stacjonarne

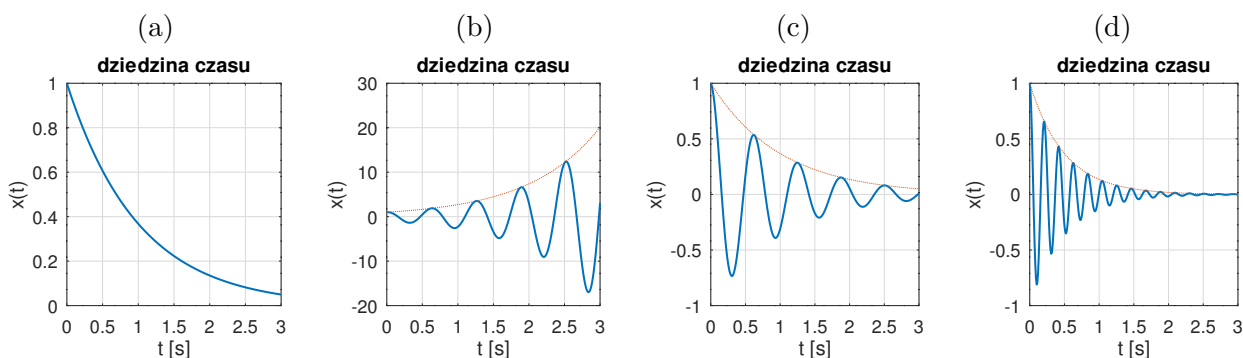
3.1 Na rysunkach przedstawiono położenie biegunów transmitancji SLS na płaszczyźnie s . Które z systemów nie są stabilne w sensie BIBO? Które dają odpowiedź oscylacyjną a które relaksacyjną? Jakie są częstotliwości oscylacji (jeśli występują) oraz jakie są stałe czasu eksponencjalnego spadku bądź wzrostu (jeśli występują)?



3.2 Na rysunkach przedstawiono odpowiedzi impulsowe SLS. Naszkicuj orientacyjne położenie biegunów transmitancji tych systemów na płaszczyźnie s .

4 Filtry cyfrowe

4.1 Dolnoprzepustowy filtr cyfrowy ma częstotliwość odcięcia $f_c = 0.2$. Ile będzie wynosiła jego częstotliwość graniczna f_g jeżeli będzie on przetwarzał próbki uzyskiwane z częstotliwością



$$f_s = 44100 \text{ Hz?}$$

4.2 Zaprojektuj metodą okienkowanej funkcji sinc dolnoprzepustowy filtr cyfrowy o długości $M = 11$, który przetwarzając sygnał próbkowany z częstotliwością $f_s = 22 \text{ kHz}$ będzie miał częstotliwość graniczną $f_g = 4 \text{ kHz}$. Zastosuj okno Hamminga.

4.3 W układzie analogowym pracuje dolnoprzepustowy filtr RC 1. stopnia (transmitancja dolnoprzepustowego filtra RC: $H(s) = \frac{1}{sRC+1}$). Niech $R=10,00 \text{ k}\Omega$, $C=1,000 \mu\text{F}$. Oblicz metodą transformacji biliniowej transmitancję $H(z)$ oraz współczynniki cyfrowego jego odpowiednika. Obliczenia wykonaj dwukrotnie: dla częstotliwości próbkowania $1,000 \text{ Hz}$ oraz $100,0 \text{ Hz}$.

4.4 W układzie analogowym pracuje górnoprzepustowy filtr RC 1. stopnia. Niech $R=100,0 \text{ k}\Omega$, $C=10,00 \text{ nF}$. Oblicz jego transmitancję w dziedzinie częstotliwości zespolonej s (to jest tematyka kursu Technika Analogowa) a następnie używając metody transformacji biliniowej transmitancję w dziedzinie z i współczynniki filtra. Z jakimi częstotliwościami próbkowania powinien działać filtr cyfrowy?

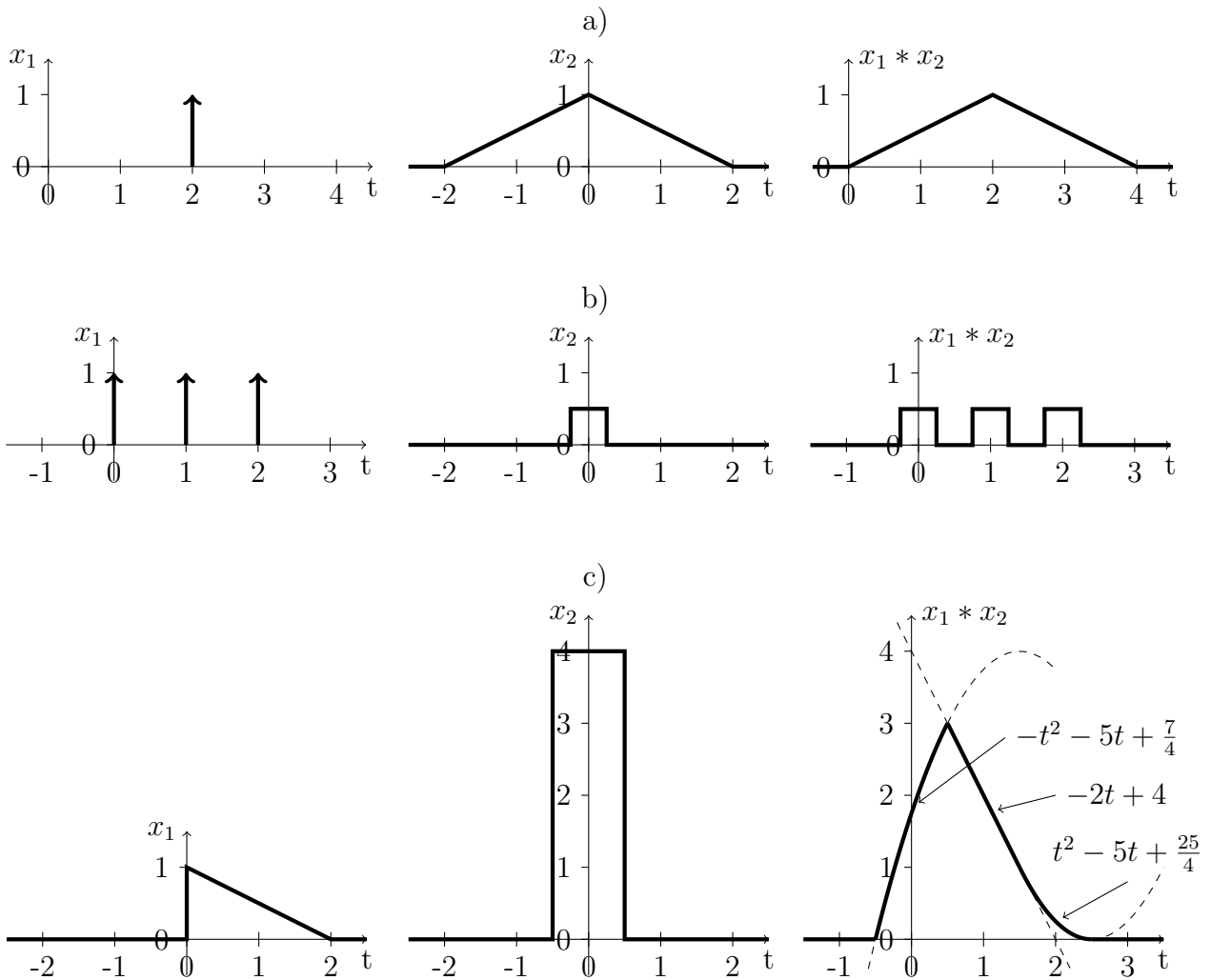
4.5 W układzie analogowym pracuje środkowoprzepustowy filtr RLC o transmitancji $H(s) = \frac{s}{\frac{L}{R}s + s + \frac{1}{RC}}$.

Rozdział 3

Odpowiedzi

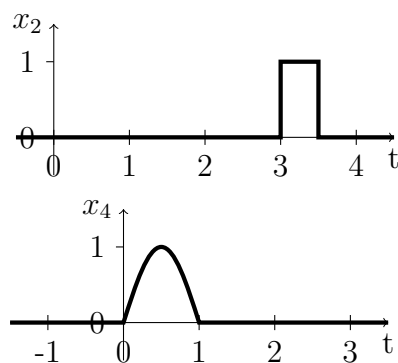
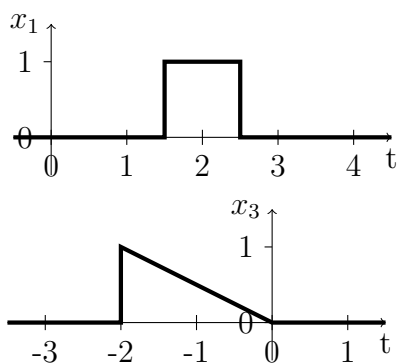
1 Sygnały

1.1



1.2 $y[n] = [1, 8, 28, 50, 48, 37, 38, 29, 11, 2]$

1.3



- $[x_1] = 1$
- $\langle x_1 \rangle = 1$
- $E_{x_1} = 1$
- $\langle x_1^2 \rangle = 1$

- $[x_2] = \frac{1}{2}$
- $\langle x_2 \rangle = 1$
- $E_{x_2} = \frac{1}{2}$
- $\langle x_2^2 \rangle = \frac{1}{2}$

- $[x_3] = 1$
- $\langle x_3 \rangle = \frac{1}{2}$
- $E_{x_3} = \frac{2}{3}$
- $\langle x_3^2 \rangle = \frac{1}{3}$

- $[x_4] = \frac{2}{\pi}$
- $\langle x_4 \rangle = \frac{\pi}{2}$
- $E_{x_4} = \frac{1}{2}$
- $\langle x_4^2 \rangle = \frac{1}{2}$

1.4

- $P_{x_1} = \frac{107}{72}$
- $RMS_{x_1} = \sqrt{\frac{107}{72}}$

- $P_{x_2} = \frac{9}{2} \left(1 - \frac{1}{1+400\pi^2}\right)$
- $RMS_{x_2} = 3\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1+400\pi^2}\right)}$

1.5 34,150 MB

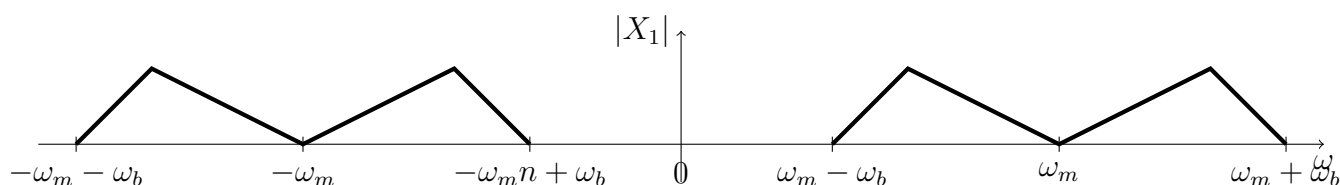
1.6 585 ms

2 Transformata Fouriera

2.1 Widmo będzie składało się z 99 składowych. Częstotliwości wskazanych składowych widma to odpowiednio 17 Hz, 105 Hz, 357 Hz

2.2 $y[0] = \frac{13}{3}, y[1] = -\frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}j, y[2] = -\frac{4}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}j, y[3] = -\frac{1}{3}$

2.3 Do zniekształceń nie dojdzie, jeżeli $\omega_m - \omega_b > 0$.



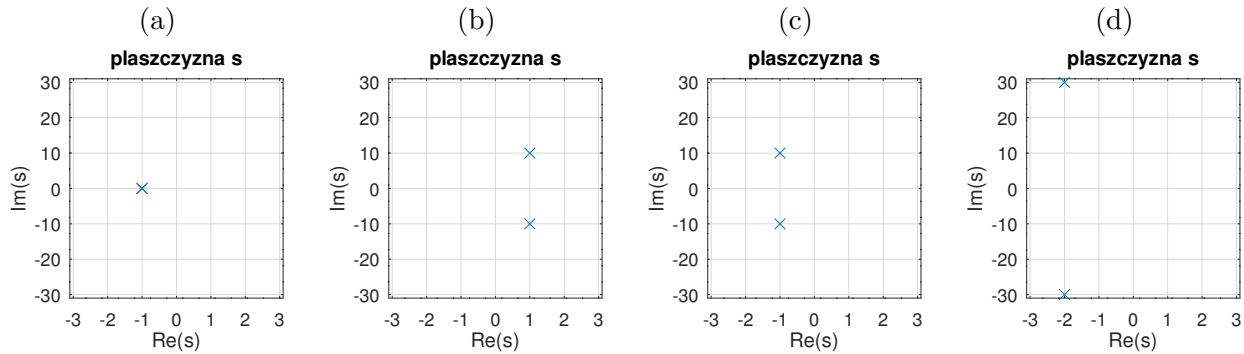
3 Systemy Liniowe Stacjonarne

3.1 Systemy niestabilne w sensie BIBO: b, d, g.

Odpowiedź impulsową oscylacyjną będą się cechowały systemy: a, g, h ($\omega = 10 \text{ rad/s}$) oraz d, e ($\omega = 20 \text{ rad/s}$).

System a da odpowiedź o amplitudzie oscylacji stałej w czasie. Systemy c, e, f, h cechują się eksponencjalnym spadkiem odpowiedzi impulsowej o stałych czasu $\tau = 1$ s (systemy c, e) oraz $\tau = 0,5$ s (systemy f, h). Systemy b, d, g dadzą odpowiedź impulsową rosnącą eksponencjalnie w czasie ze stałymi czasu $\tau = 1$ s (systemy b, d) oraz $\tau = 0.5$ s (system g).

3.2



4 Filtry cyfrowe

4.1 $f_g = 8820$ Hz

4.2 Zaokrąglone wartości współczynników filtra to: $b = [-0,003 \ -0,013 \ -0,012 \ 0,082 \ 0,264 \ 0,364 \ 0,264 \ 0,082 \ -0,012 \ -0,013 \ -0,003]$

4.3 Częstotliwość graniczna filtra RC o podanych wartościach R i C to w zaokrągleniu 15,90 Hz. Taki filtr nie może być zrealizowany cyfrowo z częstotliwością próbkowania 1,000 Hz.

Dla $f_s = 100,0$ Hz $H(z) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$ zatem $a = [1, -\frac{1}{3}]$, $b = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

4.4 $H(s) = \frac{sRC}{sRC+1}$. $H(z) = \frac{2f_sRC(z-1)}{(2f_sRC+1)z+(1-2f_sRC)}$ co po przekształceniu da $a = [1, \frac{k-1}{k+1}]$, $b = [\frac{k}{k+1}, -\frac{k}{k+1}]$, gdzie $k = 2f_sRC$.

Częstotliwość graniczna filtra to $f_g = \frac{1}{2\pi RC}$. System cyfrowy musi działać z częstotliwością co najmniej 2x większą ale ze względu na niedokładności transformacji biliniowej powinna ona być co najmniej 4 razy większa.

4.5

Rozdział 4

Wskazówki i odpowiedzi

1 Sygnały

1.1 Przy obliczaniu splotów sygnałów x_1 i x_2 , które nie składają się wyłącznie z delt Diraca, należy całkę $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \tau)x_2(\tau)d\tau$ obliczyć dla kilku przedziałów τ osobno, n.p. gdy niezerowe wartości $x_1(t - \tau)$ zaczynają przekrywać niezerowe wartości $x_2(\tau)$, gdy przekrywają się całkowicie i gdy kończą się przekrywać.

1.4 Sygnał x_1 jest okresowy. Rozłóż wyrażenie pod całką x_1 na sumę stałych oraz funkcji harmoniczných w pierwszej potęgze. Całka tych drugich równa jest 0. Dla sygnału x_2 zastosuj rekurencyjne całkowanie przez części.

2 Transformata Fouriera

3 Systemy Liniowe Stacjonarne

3.2 Oszacowanie położenia biegunów jest możliwe przez zgrubną ocenę stałej czasu zmiany eksponencjalnej obwiedni odpowiedzi impulsowej oraz liczby oscylacji (jeśli występują) w ustalonym czasie (np 1 s).

4 Filtry cyfrowe